

1921.

OCT 11 1921

No. 14.

SCHENAL LIBRARY
11 1921
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 65. Heft 6.

DER GANZEN REIHE 870. BANDES 6. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1921 erschienen Bd. 64, 65 und 66 à 8 Hefte. Preis von Bd. 65 M. 60.—.
Nach dem Ausland mit Valuta-Aufschlag.

Ausgegeben am 30. August 1921.

Inhalt.

	Seite
1. Konstantin Iwanow. Untersuchung der Dispersion im elektrischen Spektrum des Wassers im Intervall von 1240 bis 600 mm Wellenlänge	481
2. G. Bakker. Die thermodynamische Theorie der Kapillarität von van der Waals, die Theorie der Kapillarschicht von G. Bakker, und die theoretische Isotherme von James Thomson	507
3. G. Borelius und F. Gunnesson. Messung von Thomsoneffekten bei niederen Temperaturen	520
4. H. Weyl. Feld und Materie	541
5. E. Gehreke und E. Lau. Über die Balmerserie des Wasserstoffs. (Hierzu Tafel II.)	564

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 9 I.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzusechnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschriften der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.





ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 65

**1. Untersuchung der Dispersion im elektrischen Spektrum des Wassers im Intervall von 1240 bis 600 mm Wellenlänge;
von Konstantin Iwanow.**

§ 1. Die Entdeckung von Drude der anomalen Absorption im elektrischen Spektrum der Flüssigkeiten schien darauf hinzuweisen, daß die charakteristischen Eigenschaften des optischen Spektrums auch im Gebiete der elektrischen Wellen zum Vorschein gelangen. Es ist aber von Drude weiter gezeigt worden, daß bei Zulassung einer sehr großen Dämpfung der Schwingungszentren („leitende Teilchen in isolierter Umgebung“) die Annahme langsamer Eigenschwingungen, deren Periode in den Bereich der Hertzschén Wellen fallen, bei Erklärung der von ihm entdeckten Erscheinungen umgangen werden kann. Eine auf solcher Grundlage von Drude entwickelte Theorie kommt zum Schluß, daß außer der anomalen Absorption auch „reine anomale Dispersion“, d. h. Abnahme des Brechungsindex mit abnehmender Wellenlänge im elektrischen Spektrum zu erwarten ist.

Im Zusammenhang mit diesen theoretischen Auseinandersetzungen ist es von vielen Forschern versucht worden, das Aussehen des elektrischen Spektrums auf Grund der Dispersionsmessungen näher zu beschreiben. Solche Versuche haben aber wegen des sehr lückenhaften und wenig genauen Beobachtungsmaterials zu keinem eindeutigen Resultate geführt. Erst nachdem die für die Dispersionsmessungen besonders geeigneten Schwingungssysteme von A. R. Colley¹⁾ ausgearbeitet waren, gelang es ihm, bei Anwendung von Drahtwellen eine für derartige Messungen erforderliche Präzision zu erreichen und den Verlauf der Dispersion im elektromagnetischen Spektrum in größeren Wellenbereichen nach einer einheitlichen

1) A. R. Colley, Physik. Zeitschr. 10. S. 471. 1909. Dissertation (russisch), Odessa 1909.

Methode systematisch zu untersuchen. Als Resultat dieser Untersuchungen ergab sich der komplizierte Bau des elektrischen Spektrums, welcher, in voller Analogie mit dem Bau des optischen Spektrums, als aus einer großen Zahl verhältnismäßig enger Streifen bestehend erkannt wurde. Bei dieser Gelegenheit ist aber eine Erscheinung zum Vorschein gekommen, welche im optischen Spektrum wegen der Natur desselben nicht zur Beobachtung gelangen kann; es ist nämlich festgestellt worden, daß im Gebiet der Dispersionsstreifen der Dispersionsverlauf von der zeitlichen Dämpfung der Schwingungen in hohem Grade abhängig ist. Im Zusammenhange damit ist weiter von Colley gezeigt worden, daß wegen der oben erwähnten Abhängigkeit die Bestimmung der Wellenlänge in Flüssigkeit im Gebiet der Streifen aus *relativen* Lagen der Knoten prinzipiell unrichtig ist; das übliche Meßverfahren ist daher durch ein anderes zu ersetzen, wo die Wellenlänge aus der Lage eines *bestimmten* (ersten) Knotens relativ zu der in den wahren Knoten verlegten Flüssigkeitsgrenze zu ermitteln ist (*absolute* Knotenlage).

Dieses richtige Meßverfahren, welches den weiteren Messungen von A. R. Colley und N. Obolensky¹⁾ zugrunde liegt, ist bei den ersten von Colley in Wasser ausgeführten Messungen nicht angewandt worden. Da aber das elektrische Spektrum des Wassers, welchem eine so große Dielektrizitätskonstante zukommt, ein bedeutendes Interesse darbietet, so habe ich, einem freundlichen Rate des Prof. A. R. Colley folgend, es unternommen, dieses Spektrum bei Anwendung des richtigen Meßverfahrens in möglichst größerem Bereich aufzusorgfältigte zu untersuchen.

Der erste Teil meiner Untersuchung, über den an dieser Stelle berichtet werden soll, umfaßt das noch nicht durchforschte Spektralgebiet von 620—300 mm Halbwellenlänge.

§ 2. Die von mir benutzte Meßmethode war diejenige der Drahtwellen in der von A. R. Colley²⁾ ausgearbeiteten Form. Alle Messungen sind bei Anwendung der *ersten An-*

1) N. Obolensky, Physik. Zeitschr. 11. S. 483. 1910.

2) A. R. Colley, a. a. O.

ordnung von Colley, welche in Fig. 1 skizziert ist, gemacht worden.

Die Hauptdimensionen der Versuchsanordnung waren folgende. Zwei parallele Kupferdrähte (von ca. 5 m Länge und 0,85—0,95 mm Durchmesser) verlaufen in einer Entfernung von 15 mm voneinander. Durch zwei angelötete geradlinige

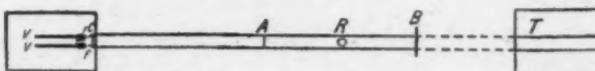


Fig. 1.

Drahtbrücken *C* und *A* ($d = 1,75$ mm) wird ein Schwingungskreis (das primäre System) abgegrenzt, welches durch in Petroleum befindlichen Vibrator *VV* zu Schwingungen erregt wird. Der Vibrator besteht aus zwei Messingstäben *VV* ($l = 50$ bis 140 mm, $d = 4,5$ mm) und einem mittleren Teil *fCf*; er ist also durch den gemeinsamen Teil *C* direkt mit dem primären Kreise gekoppelt. Durch zwei Funken *ff* ist der Vibrator in drei Teile geteilt. Der unmittelbar an den Funkenstrecken liegende kleine Kondensator besteht aus zwei kreisrunden Messingscheiben ($D = 10$ mm), die durch eine Glasplatte ($d = 2$ mm) getrennt sind; durch diesen wird die gleichzeitige Entladung durch die zwei Funken und das richtige Funktionieren des geteilten Vibrators bedingt. Die Ladungen werden durch einen kleinen (Funkenlänge = 6 cm) mit Wehneltunterbrecher betriebenen und mit einem Strom von 5—7 Amp. gespeisten Induktorium zugeführt; die Aufladung des Vibrators geschieht durch vier Funken, zwei in Luft und zwei in Petroleum.

Bei dieser Colleyschen Anordnung steht bekanntlich die auf den Drähten erhaltene Wellenlänge zu den linearen Dimensionen vom System *CA* in strenger Beziehung. Durch Verschiebung der Brücke *A* um eine bestimmte Länge wird nämlich die Halbwellenlänge um denselben Betrag geändert. Beachtet man weiter, daß bei einem gegebenen Vibrator durch die Verschiebung der Brücke *A* die Wellenlänge in weiten

Grenzen geändert werden kann, ohne daß ihre Intensität dabei merklich beeinflußt wird, so ist anzunehmen, daß in der Colleyschen Anordnung der Fall der Stoßerregung vorliegt. Dieser Umstand ist für die Erhaltung wenig gedämpfter, reiner Wellen und somit für die Untersuchung der Dispersion von grösster Bedeutung.

Mit dem primären Kreise CA ist ein unveränderlicher Kreis (sekundäres System) AB verbunden, welcher durch die festliegende Brücke A und durch die verschiebbare Brücke B abgegrenzt ist. Durch die Verschiebung der Brücke B werden die Knotenlagen aufgesucht und somit die Wellenlänge in Luft in üblicher Weise ermittelt.

Die parallelen Drähte durchsetzen die Vorder- und Hinterwand eines Troges T , der aus Glasscheiben mit Siegellack zusammengekittet war und dessen Dimensionen $50,0 \times 12,5 \times 13,0$ cm³ betragen. Die Drähte verlaufen über dem Boden des Troges in einer Höhe von 6 cm. Die vordere Trogwand war 1 mm dick, die übrigen 2 mm. Der Trog war oben mit einem unveränderlich mit ihm verbundenen Millimetermaßstab

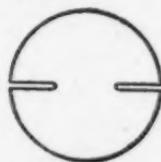


Fig. 2.

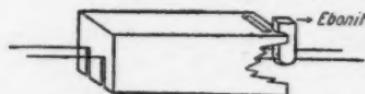


Fig. 3.

versehen; ein am Maßstab gleitender Schieber konnte mittels eines Glasstabes die Brücke im Wasser verschieben. In gleicher Weise geschah die Verschiebung der Luftbrücke, welche mittels eines Schiebers ausgeführt wurde, der längs eines am Tisch angeschraubten und in mm geteilten Maßstabes gleiten konnte. Die Luftbrücke hatte die in der Fig. 2, die Wasserbrücke diese oder auch die in der Fig. 3 gezeigte, von Colley zur Vermeidung der möglichen Resonanz seitens der Brücke B empfohlene Form.

§ 3. Als Indikator diente mir ein kleines Geißlerröhrchen, weil 1. auch mit diesem bei zweckmäßigem Verfahren

und gebotener Vorsicht die hier nötige Präzision und Zuverlässigkeit der Messungen zu erreichen ist, 2. die Einstellungen nur wenig Zeit erfordern, was für die Untersuchung der Dispersion in größerem Wellenintervalle von Bedeutung ist. Die von mir benutzten Röhrenindikatoren waren kugelförmig ($D < 15$ mm), mit eingelöteten Platinelektroden, auf 0,5—0,3 mm evakuiert. Da die „Verkürzung“ des Röhrchens desto kleiner und konstanter ist, in je weitere Teile des Kraftfeldes dasselbe hineingebracht ist, so stellte ich das Röhrchen gewöhnlich 3—5 mm unter den Drähten auf. Jedenfalls wurde die Konstanz der Röhrenverkürzung *immer* kontrolliert. Was die Schärfe der einzelnen Einstellungen anbetrifft, so konnte es immer leicht erreicht werden, daß die Ablesungen in einem Bereich von etwa 1,0—1,5 mm liegen. Zur Bestimmung der Lage des ersten Knotens in Luft sind gewöhnlich 30—40, für die weiter liegenden je 20 Ablesungen gemacht worden.

Das Verfahren zur Kontrolle der konstanten Verkürzung des Indikatorröhrcens von einer Messung zur anderen bestand in folgendem. Da die Wellenlänge, wie oben bemerkt, mit den linearen Dimensionen von CA im strengen Zusammenhang steht, so bedingt die Verschiebung der Brücke A um $\pm \Delta A$ mm eine Verschiebung des ersten Knotens um

$$\pm \Delta a_1 = 2 \Delta A \text{ mm},$$

falls die Indikatorverkürzung konstant bleibt.

In der Tabelle I sind die entsprechenden Werte von ΔA und $\frac{1}{2} \Delta a_1$ (in mm) für drei Messungsreihen zusammengestellt. Jede der Messungsreihen ist bei einheitlichem Vibrator und Röhre erhalten worden.

Tabelle I.

ΔA	$\frac{1}{2} \Delta a_1$	ΔA	$\frac{1}{2} \Delta a_1$	ΔA	$\frac{1}{2} \Delta a_1$
3,0	3,24	3,0	3,38	7,8	7,66
1,9	1,78	9,5	9,88	4,8	5,06
3,4	3,03	3,0	3,25	6,6	6,56
5,1	5,10	7,5	8,13	5,6	5,04
5,0	5,18	4,9	5,37	5,4	5,14
7,7	7,98	9,4	10,12	6,1	5,94
4,9	4,64	14,6	14,56	19,7	19,88
7,6	8,26	18,0	12,58	2,4	2,63
5,2	4,97	10,4	9,90	7,2	6,87

Die fünf ersten Zeilen der ersten Kolonne gehören dem Wellenintervall, wo das Wasser keine Dispersion besitzt, alle weiteren den Wellenintervallen mit ausgeprägter Dispersion an. Die Übereinstimmung ist befriedigend; auch waren bei den Angaben der Verschiebungagrößen der Brücke *A* Ungenauigkeiten von 0,1—0,3 mm nicht ausgeschlossen, so daß wahrscheinlich die Übereinstimmung noch besser ist. Bei dem angewandten Meßverfahren des Brechungsindex kommt es aber auf die genaue Kenntnis der Verschiebung des ersten Knotens von einer Messung zur anderen nicht an, weil sowohl die Wellenlänge, als auch die erste Knotenlage für jede Messung einzeln bestimmt wurden.

Um die Indikatorverkürzung während *jeder einzelnen Messung* zu kontrollieren, bestimmte ich immer die Lage eines bestimmten (meistens des ersten) Knotens am Anfang, in der Mitte und am Ende der Messung. Wie die in der Tab. II angeführten Protokolle zeigen, änderte sich die Indikatorverkürzung während einer Messung nicht.

Tabelle II.

a_1 in mm in Luft			a_1 in mm in Wasser			
742,5	748,6	748,9	111,2	111,0	111,0	111,8
2,9	3,0	2,6	1,4	1,0	2,0	1,3
3,0	2,6	3,3	1,6	1,5	1,8	1,0
3,2	3,1	2,7	1,1	1,3	1,2	1,3
3,6	2,8	3,4	1,5	2,2	1,1	1,0
2,9	3,7	2,7	1,3	1,0	1,0	2,4
3,2	3,5	3,5	1,7	2,1	1,0	2,2
2,9	3,1	3,0	2,5	1,6	2,0	1,5
3,7	3,5	3,5	1,0	1,8	2,0	1,0
2,8	2,6	3,8	2,5	2,2	2,0	1,5
748,07	748,10	748,19	111,58	111,57	111,46	111,50

§ 4. Es muß noch folgende mögliche Fehlerquelle nicht unerwähnt bleiben. Ist die Schwingungsperiode des Vibrators der des primären Systems *nahe* gleich, so können die ersten Knoten infolge der neben ihnen auftretenden Knoten der Vibratorwelle etwas verschoben erscheinen. Für weitere Knoten ist eine durch die Vibratorwelle bedingte Knotenverschiebung nicht zu befürchten, da im Falle der Stoßregung die Vibratorwelle stark gedämpft ist. Wenn auch

bei meinen Versuchen die Welle des Vibrators mit dem Indikatorröhren nicht wahrgenommen werden konnte, so ist aus Vorsicht immer so verfahren worden, daß bei der Ausmessung eines bestimmten Wellenintervalle der dabei benutzte Vibrator seiner Periode nach so gewählt wurde, daß eine Verschiebung der ersten Knoten ausgeschlossen war. Bei dem großen Wirkungsbereiche des Vibrators läßt sich das immer leicht erreichen.

§ 5. Tab. III enthält drei Protokolle der Wellenlängenmessungen in Luft, auf Grund deren ein Urteil über die Genauigkeit der Knotenlagebestimmungen gewonnen werden kann.

Tabelle III.

	a_1	a_2	$a_3 \dots$	a_6	a_7	a_{10}	in mm
Beob.	446,02	731,30	1016,13	2442,00	2726,97	3012,29	
Berechn.	446,08	731,16	1016,29	2441,94	2727,07	3012,20	
Fehler	-0,01	+0,14	-0,16	+0,06	-0,10	+0,09	
$\frac{A}{2} = 285,18 \text{ mm}$							
	a_1	$a_2 \dots$		a_7		a_8	in mm
Beob.	576,00		924,52		2667,38		3016,13
Berechn.	575,98		924,56		2667,46		3016,04
Fehler	+0,02		-0,04		-0,08		+0,09
$\frac{A}{2} = 348,58 \text{ mm}$							
	a_1	a_2	a_3		a_4		in mm
Beob.	1105,32		1745,16		2385,73		3025,70
Berechn.	1105,22		1745,39		2385,56		3025,78
Fehler	+0,10		-0,23		+0,17		-0,03
$\frac{A}{2} = 640,17 \text{ mm}$							

Hier bedeutet a_k die Ablesung im k -ten Knoten am Maßstabe, $A/2$ die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete halbe Wellenlänge in Luft. Mit besonderer Sorgfalt ist immer dabei die Lage des *ersten* Knotens bestimmt worden.

§ 6. Die Bestimmung des ersten *wahren* Knotens, in welchen bei Messungen in nicht oder schwach absorbierenden Flüssigkeiten die Flüssigkeitsgrenze zu verlegen ist, erfordert die Kenntnis des Wertes der Brückenverkürzung in Luft. Bei meinen Messungen ist beim Drahtabstande von 15 mm und Plattenbrücken der von Colley benutzte Wert 3,75 mm angenommen worden. Ist auch dieser Wert nicht ganz richtig,

Die fünf ersten Zeilen der ersten Kolonne gehören dem Wellenintervall, wo das Wasser keine Dispersion besitzt, alle weiteren den Wellenintervallen mit ausgeprägter Dispersion an. Die Übereinstimmung ist befriedigend; auch waren bei den Angaben der Verschiebungsgrößen der Brücke A Un- genauigkeiten von 0,1—0,3 mm nicht ausgeschlossen, so daß wahrscheinlich die Übereinstimmung noch besser ist. Bei dem angewendeten Meßverfahren des Brechungsindex kommt es aber auf die genaue Kenntnis der Verschiebung des ersten Knotens von einer Messung zur anderen nicht an, weil sowohl die Wellenlänge, als auch die erste Knotenlage für jede Messung einzeln bestimmt wurden.

Um die Indikatorverkürzung während *jeder einzelnen Messung* zu kontrollieren, bestimmte ich immer die Lage eines bestimmten (meistens des ersten) Knotens am Anfang, in der Mitte und am Ende der Messung. Wie die in der Tab. II angeführten Protokolle zeigen, änderte sich die Indikatorverkürzung während einer Messung nicht.

Tabelle II.

a_1 in mm in Luft			a_1 in mm in Wasser			
742,5	743,6	743,9	111,2	111,0	111,0	111,8
2,9	3,0	2,6	1,4	1,0	2,0	1,3
3,0	2,6	3,8	1,6	1,5	1,8	1,0
3,2	3,1	2,7	1,1	1,3	1,2	1,3
3,6	2,8	3,4	1,5	2,2	1,1	1,0
2,9	3,7	2,7	1,3	1,0	1,0	2,4
3,2	3,5	3,5	1,7	2,1	1,0	2,2
2,9	3,1	3,0	2,5	1,6	2,0	1,5
3,7	3,5	3,5	1,0	1,8	2,0	1,0
2,8	2,6	3,3	2,5	2,2	2,0	1,5
743,07	743,10	743,19	111,58	111,57	111,46	111,50

§ 4. Es muß noch folgende mögliche Fehlerquelle nicht unerwähnt bleiben. Ist die Schwingungsperiode des Vibrators der des primären Systems *nahe* gleich, so können die ersten Knoten infolge der neben ihnen auftretenden Knoten der Vibratorwelle etwas verschoben erscheinen. Für weitere Knoten ist eine durch die Vibratorwelle bedingte Knotenverschiebung nicht zu befürchten, da im Falle der Stoßerregung die Vibratorwelle stark gedämpft ist. Wenn auch

bei meinen Versuchen die Welle des Vibrators mit dem Indikatorröhren nicht wahrgenommen werden konnte, so ist aus Vorsicht immer so verfahren worden, daß bei der Ausmessung eines bestimmten Wellenintervales der dabei benutzte Vibrator seiner Periode nach so gewählt wurde, daß eine Verschiebung der ersten Knoten ausgeschlossen war. Bei dem großen Wirkungsbereiche des Vibrators läßt sich das immer leicht erreichen.

§ 5. Tab. III enthält drei Protokolle der Wellenlängenmessungen in Luft, auf Grund deren ein Urteil über die Genauigkeit der Knotenlagebestimmungen gewonnen werden kann.

Tabelle III.

	a_1	a_2	a_3	\dots	a_8	a_9	a_{10}	in mm
Beob.	446,02	731,80	1016,13	2442,00	2726,97	3012,29		
Berechn.	446,03	731,16	1016,29	2441,94	2727,07	3012,20		
Fehler	-0,01	+0,14	-0,16	+0,06	-0,10	+0,09		
$\frac{A}{2} = 285,18 \text{ mm}$								
	a_1	$a_2 \dots$		a_7		a_8		in mm
Beob.	576,00		924,52		2667,38		3016,13	
Berechn.	575,98		924,56		2667,46		3016,04	
Fehler	+0,02		-0,04		-0,08		+0,09	
$\frac{A}{2} = 348,58 \text{ mm}$								
	a_1	a_2	a_3		a_8		a_4	in mm
Beob.	1105,32		1745,16		2385,73		3025,70	
Berechn.	1105,22		1745,39		2385,56		3025,73	
Fehler	+0,10		-0,23		+0,17		-0,03	
$\frac{A}{2} = 640,17 \text{ mm}$								

Hier bedeutet a_k die Ablesung im k -ten Knoten am Maßstab, $A/2$ die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete halbe Wellenlänge in Luft. Mit besonderer Sorgfalt ist immer dabei die Lage des *ersten* Knotens bestimmt worden.

§ 6. Die Bestimmung des ersten *wahren* Knotens, in welchen bei Messungen in nicht oder schwach absorbierenden Flüssigkeiten die Flüssigkeitsgrenze zu verlegen ist, erfordert die Kenntnis des Wertes der Brückenverkürzung in Luft. Bei meinen Messungen ist beim Drahtabstande von 15 mm und Plattenbrücken der von Colley benutzte Wert 3,75 mm angenommen worden. Ist auch dieser Wert nicht ganz richtig,

so kann das nur auf den absoluten Wert des Brechungsindex, nicht aber auf den Verlauf (im engen Wellenlängenbereiche) der Dispersion einen Einfluß haben.

§ 7. Bei Wellenlängenmessungen in Flüssigkeit ist eine Größe ξ zu ermitteln, welche, bei unveränderter Lage des mit dem Tropf verbundenen Maßstabes, die Verkürzung der Brücke in Flüssigkeit und die „Null“ der Skala einschließt, und welche zu der in einem bestimmten Knoten am Tropfmaßstab gemachten Ablesung zu addieren ist, um den Abstand des entsprechenden *wahren* Knotens von der Flüssigkeitsgrenze zu erhalten. Diese läßt sich sofort angeben, falls das Flüssigkeitsspektrum dispersionsfreie Teile hat, da in solchen Spektralteilen die aus den absoluten Knotenlagen ermittelten Wellenlängen denjenigen aus den relativen Knotenlagen bestimmten gleichkommen. Bei Messungen in Wasser sind in dem untersuchten Spektralgebiete glücklicherweise zwei solche Spektralteile aufgefunden worden. Das eine von Colley entdeckte und von mir nochmals sorgfältig ausgemessene Gebiet liegt zwischen $\frac{A}{2} = 300-333$ mm; ein anderes hat sich bei meinen Messungen zwischen $\frac{A}{2} = 594-620$ mm erwiesen.

Für den Spektralteil $\frac{A}{2} = 594-620$ mm wurden folgende Mittelwerte erhalten:

$$\xi_1 = -53,07; \quad n_{17,0} = 8,998; \quad n_{17,0}^2 = 80,96;$$

$$\text{Für den Spektralteil } \frac{A}{2} = 300-333 \text{ mm.}$$

$$\xi_2 = -52,53; \quad n_{17,0} = 8,974; \quad n_{17,0}^2 = 80,53;$$

Hier bedeutet $n_{17,0}$ den Brechungsindex des Wassers bei der Temperatur $17,0^\circ\text{C}$. Die Werte von ξ_1 und ξ_2 sind etwas verschieden; bei Berechnung der im Zwischenintervalle liegenden Messungen ist die Differenz $\xi_1 - \xi_2$ auf die Wellenlängen gleichmäßig verteilt worden.

§ 8. Bei Resultaten, welche aus den absoluten Lagen des ersten Knotens gewonnen sind, ist die Genauigkeit der Messungen in erster Linie davon abhängig, wie genau a) die Flüssigkeitsgrenze im wahren Knoten eingestellt werden kann; b) der erste Knoten in Flüssigkeit zu ermitteln ist.

Was die Bestimmung der Halbwellenlänge in Luft anbetrifft, so kann dieselbe leicht bis auf 0,1 mm, d. h. bis auf wenige Hundertstel Prozent genau gemessen werden. Bei Beurteilung der Genauigkeit des Resultates kommt also diese Fehlerquelle neben den anderen nicht in Betracht.

Es sollen die unter a) und b) angegebenen Verhältnisse näher besprochen werden.

Durch Verschiebung der Flüssigkeitsgrenze relativ zum wahren Knoten in Luft wird die aus dem ersten Knoten in Flüssigkeit ermittelte Wellenlänge in ihrer Größe geändert, wodurch bedeutende Fehler in das Resultat hineingebracht werden können. Diese Abhängigkeit war daher näher zu untersuchen.

Da es sich nur um relative Verschiebungen der Flüssigkeitsgrenze und des ersten wahren Knotens in Luft handelt, so ist ein Verfahren angewandt worden, wo anstatt der Flüssigkeitsgrenze der Knoten (bei unveränderter Wellenlänge) relativ zur festliegenden Flüssigkeitsgrenze verschoben wurde. Dies lässt sich für kleine Verschiebungen, die ja für unsere Zwecke in Betracht kommen, auf folgendem höchst bequemem und zuverlässigen Wege erreichen.

Auf das System *AB* (Fig. 1) wurde zwischen *A* und *B* in einer Entfernung von etwa 20 mm von *A* ein kleiner Kondensator aufgelegt; dieser bestand (Fig. 4) aus zwei Messingzylindern ($l = 10$ mm, $D = 3,5$ mm), die in eine Hartgummihülle eingebettet waren. Wird der Kondensator aus der gewählten Anfangslage zur Brücke *A* (-), oder in entgegengesetzter Richtung (+) verschoben, so verschiebt sich der Knoten in der + bzw. - Richtung, wobei die Wellenlänge unverändert bleibt. Die Abhängigkeit der Knotenverschiebung von der Kondensatorverschiebung ist für einen Fall graphisch in der Fig. 5 veranschaulicht. Verlegt man die Wassergrenze in den ersten wahren Knoten, der der Anfangslage des Kondensators entspricht, so erübrigt es den Kondensator zu verschieben, um die Verschiebungen des Knotens relativ zur festliegenden Flüssigkeitsgrenze hervorzurufen. Da bei der kleinen Kapazität des Kondensators seinen Verschiebungen viel kleinere Verschiebungen des Knotens entsprechen, so lassen sich diese auf



Fig. 4.

Grund der Kurve (Fig. 5) fein variieren und sehr genau ermitteln. Durch die Bestimmung der entsprechenden Knotenlagen in Flüssigkeit gelangt man ohne weiteres zur Festlegung

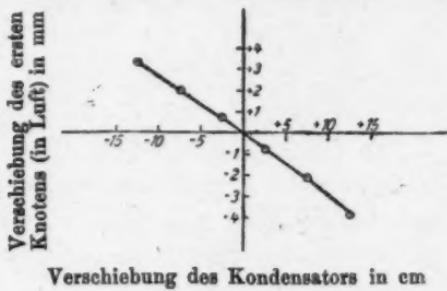


Fig. 5.

der zu untersuchenden Abhängigkeit. Für das hier angeführte Beispiel (für $\frac{A}{2} = 315,10 \text{ mm}$) ist diese Abhängigkeit in der Fig. 6 gegeben. Wie ersichtlich, beträgt die Verschiebung des

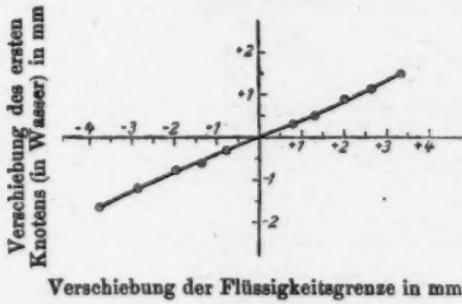


Fig. 6.

ersten Wasserknotens bei kleinen (um $\pm 1 \text{ mm}$) Unrichtigkeiten der Wassergrenze nur ungefähr 35 Proz. der letzten.

Die Genauigkeit der Bestimmung der ersten Knotenlage in Luft ist ca. 0,2 mm; auch in Ausnahmefällen kann der Fehler der Einstellung den Wert 0,5 mm nicht überschreiten. Der *maximale* Fehler, der durch die Ungenauigkeiten der Einstellung der Flüssigkeitsgrenze in die Bestimmung der Halbwellenlänge in Wasser aus absoluter Lage des ersten Wasserknotens hineingebracht werden kann, berechnet sich daraus

auf $0,5 \times 0,35 = 0,17$ mm, was für eine Halbwellenlänge in Luft von $\frac{A}{2} = 305$ mm (die ihr entsprechende Halbwellenlänge in Wasser $\frac{\lambda}{2} = 34$ mm) nur 0,5 Proz. des Resultates ausmacht.

Die Genauigkeit der Knotenlagebestimmungen in Wasser lässt sich auf Grund einiger, in Tabb. IV und V angeführten Messungen, die den dispersionsfreien Teilen angehören, abschätzen. $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_k$, wo $k = 1,2, \dots$ ist, bedeutet die aus der absoluten Lage des k -ten Knotens bestimmte Halbwellenlänge, $n_{k,17}$ ist der ihr entsprechende, und zwar auf $17,0^\circ$ C. reduzierte Brechungsindex. $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_r$ ist die aus der relativen Knotenlage berechnete Halbwellenlänge, $n_{r,17}$ ist der ihr entsprechende, wieder auf $17,0^\circ$ reduzierte, Brechungsindex. ξ ist die oben genannte Konstante.

Tabelle IV.

$$1. \quad \frac{A}{2} = 619,18 \text{ mm.} \quad t = 17,0^\circ.$$

	a_1	$a_2 \dots$	a_4	a_5 in mm
Beob.	121,95	190,72	328,39	397,34
Berechn.	121,93	190,77	328,45	397,29
Fehler	+0,02	-0,05	-0,06	+0,05

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 68,86; \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 68,82; \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 68,82; \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 68,85 \text{ mm.}$$

$$n_1 = 8,992; \quad n_2 = 8,997; \quad n_4 = 8,997; \quad n_5 = 8,993;$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_r = 68,84 \text{ mm.} \quad n_{r,17} = 8,995. \quad \xi = -53,08 \text{ mm.}$$

$$2. \quad \frac{A}{2} = 601,21 \text{ mm.} \quad t = 17,0^\circ.$$

	a_1	$a_2 \dots$	a_4	a_5 in mm
Beob.	119,92	186,70	320,88	387,28
Berechn.	119,88	186,72	320,40	387,24
Fehler	+0,04	-0,02	-0,07	+0,04

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 66,88; \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 66,82; \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 66,81; \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 66,84 \text{ mm.}$$

$$n_1 = 8,995; \quad n_2 = 8,997; \quad n_4 = 8,998; \quad n_5 = 8,994;$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_r = 66,84 \text{ mm.} \quad n_{r,17} = 8,994. \quad \xi = -53,04 \text{ mm.}$$

Tabelle V.

	1.	$\frac{A}{2} = 327,42$ mm.	$t = 16,7^\circ$.		
	a_1	a_2	a_3	a_4	$a_5 \dots a_9$ in mm
Beob.	88,83	125,07	161,45	197,88	234,10 342,84
Berechn.	88,82	125,12	161,42	197,72	234,03 343,02
Fehler	+0,01	-0,05	+0,03	-0,04	+0,07 -0,18
	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 36,31$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 36,27$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_3 = 36,31$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 36,29$	
		$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 36,32$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_6 = 36,29$ mm.		
	$n_{1,17} = 8,982$	$n_{2,17} = 8,992$	$n_{3,17} = 8,982$	$n_{4,17} = 8,987$	
	$n_{5,17} = 8,979$	$n_{6,17} = 8,987$			
	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_r = 36,33$ mm.	$n_{r,17} = 8,977$		$\xi = -52,48$ mm.	
	2.	$\frac{A}{2} = 321,05$ mm.	$t = 16,6^\circ$.		
	a_1	a_2	a_3	a_4	$a_5 \dots a_9$ in mm
Beob.	88,24	123,86	159,80	195,16	231,00 338,08
Berechn.	88,21	123,89	159,57	195,25	230,98 337,97
Fehler	+0,03	-0,03	+0,03	-0,09	+0,07 +0,11
	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 35,72$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 35,67$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_3 = 35,69$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 35,66$	
		$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 35,69$	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_6 = 35,69$ mm.		
	$n_{1,17} = 8,963$	$n_{2,17} = 8,975$	$n_{3,17} = 8,970$	$n_{4,17} = 8,978$	
	$n_{5,17} = 8,970$	$n_{6,17} = 8,970$			
	$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_r = 35,68$ mm.	$n_{r,17} = 8,973$		$\xi = -52,53$ mm.	

Der maximale Fehler in der Lagebestimmung des ersten Knotens im Wasser ist auf 0,1 mm anzusetzen, was (bei $A/2 = 300$ mm) 0,3 Proz. des Resultates ausmacht. Der Brechungsindex ist daher auch in Ausnahmsfällen aus den absoluten Lagen des ersten Knotens mit einer Genauigkeit von weniger als 1 Proz. immer zu ermitteln. In Wirklichkeit ist aber diese Genauigkeit viel größer, wie das sofort aus den Messungen, welche den dispersionsfreien Teilen des Spektrums angehören, ersichtlich ist (Tab. IV und V, Kurve auf der Fig. 9). Sie ist auf 0,2—0,3 Proz. anzunehmen.

§ 9. Auf die Möglichkeit noch folgender Fehlerquellen, die aber bei Beachtung gewisser Vorsichtsmaßregeln immer zu vermeiden sind, ist ausdrücklich hinzuweisen.

1. Resoniert die Wasserbrücke auf die auffallende Welle, so erscheint beim Übergang durch die Brückenperiode im Spektrum ein „falscher“ Streifen; für größere Perioden fällt dabei der Brechungsindex immer größer aus. So war es einmal bei meinen vorläufigen Versuchen, wo ich wegen der sehr ausgesprochenen Brückenresonanz, die ungefähr bei $\frac{A}{2} = 306$ mm eintrat, einen schmalen „falschen“ Streifen im Spektrum an der Stelle $\frac{A}{2} = 306$ mm bekam; dabei war der Brechungsindex im dispersionsfreien Gebiete $\frac{A}{2} = 306$ bis 333 mm immer $n_{r,17} = 9,025$ anstatt $n_{r,17} = 8,974$. Zur Vermeidung der Brückenresonanz benutzte ich eine von Colley empfohlene Form der Brücke (Fig. 3), oder (bei Temperaturmessungen) eine kreisrunde (Fig. 2), die seinen Dimensionen nach auf die einfallende Welle nicht resonieren konnte.

2. Eine ähnliche Wirkung hat auch die Resonanz des Hinterteiles der Drähte, welcher durch die bewegliche Brücke und die hintere Wassergrenze begrenzt ist. Die Fehler, welche durch solche Resonanz in die Messungen hineingebracht werden können, lassen sich z. B. am folgenden, bei meinen Messungen vorgekommenen Falle erläutern.

Bei Bestimmung des Temperaturkoeffizienten für $\frac{A}{2} = 610,52$ mm (vgl. unten § 15), wo mit wachsender Temperatur die Wellenlänge im Wasser ebenfalls wächst, ist für eine bestimmte Wellenlänge (für eine bestimmte Temperatur) ein eigenartiger Verlauf der Temperaturkurve beobachtet worden, welcher in der Fig. 7 durch die obenliegende Kurve abgebildet ist. Die Messungen der Halbwellenlängen im Wasser sind aus relativen Knotenlagen gemacht worden, wobei der letzte zu bestimmende Knoten nahe an der Hintergrenze lag. Die Vermutung, daß der beobachtete Knick nicht dem wirklichen Verlauf der Kurve entspricht, sondern durch die Resonanz des Hinterteiles bedingt ist, hat sich bei näherer Prüfung durchaus bestätigt, da die Kurve ihren üblichen Verlauf (Fig. 7 untenliegende Kurve) angenommen hat, sobald die schädliche Resonanz beseitigt wurde. Dies wurde dadurch erreicht, daß hinter der Brücke ein in Fig. 8 abgebildetes Gefäß zwischen den Drähten hineingebracht

wurde, welches einen die Wellen absorbierenden Elektrolyt enthielt (Leitvermögen größer als etwa $150 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}$).

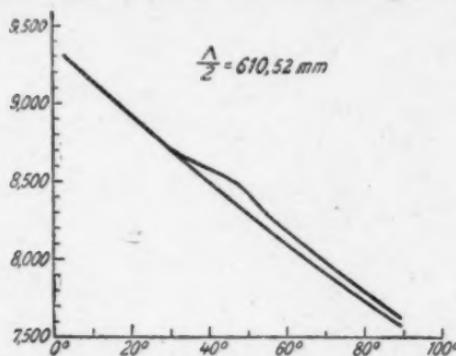


Fig. 7.



Fig. 8.

§ 10. Der sehr bedeutende Einfluß der Temperatur auf die Erscheinung ist eingehend untersucht und unten beschrieben worden.

An dieser Stelle soll vorläufig folgendes bemerkt werden. Da es sich bei den Messungen von N. Obolensky (a. a. O.) herausgestellt hat, daß inmitten der Dispersionsstreifen dem Temperaturkoeffizient kein bestimmter Wert zukommt (ein Ergebnis, welches durch meine Messungen durchaus bestätigt wurde), so ist man darauf angewiesen, die Messungen innerhalb der Dispersionsstreifen bei möglichst einheitlicher Temperatur auszuführen. Um das Wasser immer auf eine bestimmte Temperatur zu bringen, wurde auf dem Trogboden ein zickzackförmiges Glasrohr, dessen Enden aus der Wanne herausragten, gelegt. Durch dieses Rohr konnte kaltes (4 bis 7°) oder warmes (30 bis 50°) Wasser zirkulieren, wodurch die Temperatur des Wassers gerade auf 17,0° oder auf eine von der letzten sehr wenig abweichende Temperatur gebracht werden konnte. Da die Lufttemperatur im Arbeitszimmer (ein verdunkelter Raum im ersten Geschoß) überhaupt von 17,0° wenig abweichend war, so hielt sich die Wassertemperatur während einer Messung bis auf 0,1 bis 0,2° konstant.

§ 11. Die Resultate der Dispersionsmessungen im elektrischen Spektrum des Wassers im Intervalle von $\frac{\Delta}{2} = 620 \text{ mm}$

bis $\frac{A}{2} = 300$ mm sind graphisch in Fig. 9 dargestellt. Bezeichnen wir durch n_1, n_3, n_5 den aus der absoluten Lage des ersten, zweiten, fünften Wasserknotens und durch n_r den aus der relativen Lage derselben Knoten berechneten Brechungsindex, so ist hier:

- \times -Kurve . . . n_1 -Kurve,
- $+$ -Kurve . . . n_3 -Kurve,
- \bullet -Kurve . . . n_5 -Kurve,
- \circ -Kurve . . . n_r -Kurve.

Die Resultate beweisen es, daß zwischen $\frac{A}{2} = 594$ bis 333 mm das elektrische Spektrum des Wassers kompliziert gebaut ist und aus einer großen Anzahl enger Dispersionsstreifen besteht.

Da die hier mitgeteilten Messungen unter richtigen Versuchsbedingungen erhalten wurden, so gestatten sie, einige bestimmtere Schlüsse zu ziehen:

1. Die aus den ersten Knotenlagen im Wasser erhaltenen Dispersionskurven verlaufen am ausgeprägtesten, was in Analogie mit den Messungen von Colley für Äthylalkohol, Benzol usw. auf

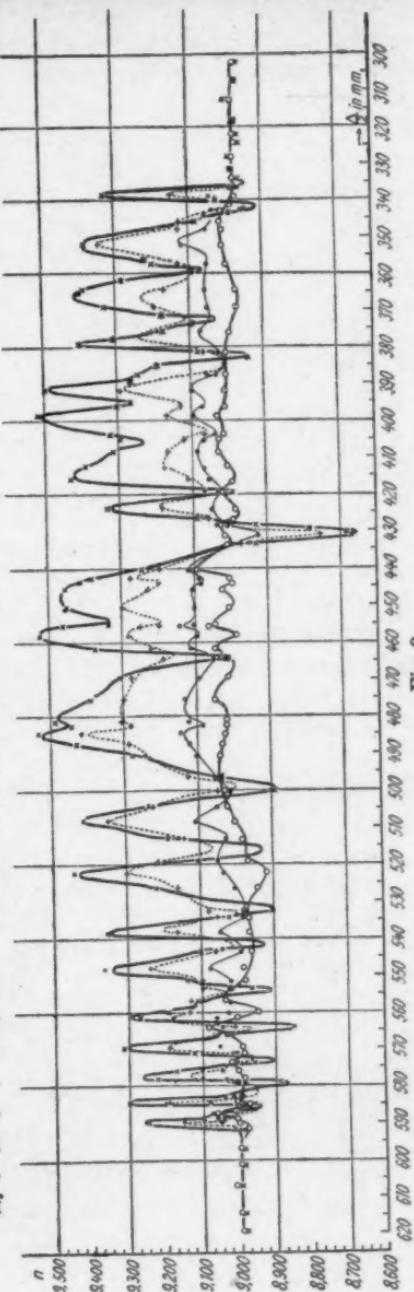


Fig. 9.

den Einfluß der zeitlichen Dämpfung der Wellen zurückzuführen ist.

Die n_r -Kurve verläuft ziemlich flach und hat denselben Charakter wie die von H. Rukop¹⁾ für kürzere Wellen bestimmte; sie erlaubt zwar, auf das Vorhandensein der Dispersionsstreifen zu schließen, ist aber durchaus nicht imstande, den richtigen Verlauf der Dispersion darzustellen. Bei dieser Gelegenheit soll nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Ermittlung der Dispersion aus den relativen Lagen der Knoten (in Flüssigkeit) innerhalb der Dispersionsstreifen auch in dem Falle unzulässig ist, falls die Abstände zwischen den Knoten in Flüssigkeit untereinander gleich sind. Bei Messungen im *ganzen* hier untersuchten Wellenbereiche lagen in allen Spektralteilen die Knoten in Wasser überhaupt in *gleichen* Abständen voneinander, obgleich die aus den absoluten Knotenlagen berechneten Wellenlängen in Teilen mit vorhandener Dispersion den aus relativen Knotenlagen bestimmten *nicht* gleichkommen. Hierauf bezügliche Beispiele sind in der Tab. VI angeführt (vgl. auch Tab. IV und V).

Tabelle VI.

	a_1	$a_2 \dots$	$a_3 \dots$	$a_4 \dots$	$a_5 \dots$	a_6 in mm
Beob.	84,96	116,30	147,56	178,77	210,05	303,72
Berechn.	85,00	116,27	147,54	178,81	210,08	303,89
Fehler	-0,04	+0,03	+0,02	-0,04	-0,03	-0,17
$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 32,44$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 31,89$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_3 = 31,68 \dots$				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 31,40$ mm.		
$\frac{A}{2} = 282,75$ mm.				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 31,27$ mm.		
<hr/>						
	a_1	$a_2 \dots$	$a_3 \dots$	$a_4 \dots$	$a_5 \dots$	a_6 in mm
Beob.	96,60	141,91	277,67			413,66
Berechn.	96,62	141,90	277,74			413,58
Fehler	-0,02	+0,01	-0,07			+0,08
$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 43,89$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 44,80$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_3 = 44,99$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 45,12$ mm.				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 45,28$ mm.		
$\frac{A}{2} = 408,38$ mm.				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_6 = 45,38$ mm.		
<hr/>						
	a_1	$a_2 \dots$	a_3	a_4	a_5	a_6 in mm
Beob.	118,73	184,58		316,41		382,36
Berechn.	118,70	184,61		316,42		382,34
Fehler	+0,03	-0,03		-0,01		+0,02
$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_1 = 65,66$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_2 = 65,75$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_3 = 65,83$; $\left(\frac{\lambda}{2}\right)_4 = 65,86$ mm.				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_5 = 65,91$ mm.		
$\frac{A}{2} = 591,64$ mm.				$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_6 = 65,91$ mm.		

1) H. Rukop, Ann. d. Phys. 42, S. 489. 1918.

§ 12. Bei der Betrachtung der Streifenanordnung fällt es auf, daß die Streifen sich in der Richtung der längeren Wellen häufen, um an einer bestimmten Stelle abzubrechen. Ein so gebautes Spektrum wird in der Optik als „Bandenspektrum“ bezeichnet. Es lag der Gedanke nahe, zu verfolgen, ob die Gesetzmäßigkeiten, welche im optischen Spektrum wohl bekannt sind, auch im elektrischen Spektrum vielleicht zum Vorschein kommen. Ist nämlich ν die dem Schwerpunkt des Streifens entsprechende Frequenz, A und B gewisse, der gegebenen Serie zugehörige Konstanten und m eine ganze Zahl ($0, 1, 2, \dots$), so sind die Linien (Streifen) oft nach dem Gesetze

$$(1) \quad \nu = A + B m^2$$

geordnet.

Ich habe versucht, die im untersuchten Spektralteil gefundenen Streifen nach demselben Gesetze anzutragen. Zur Berechnung der Konstanten A und B sind nur diejenigen Streifen herangezogen worden, welche deutlich isoliert mit scharf ausgesprochenen Maxima und Minima des Brechungsindex auftreten. Die Mitte zwischen Maximum und Minimum ist als Schwerpunkt des Streifens angenommen worden. In der Tab. VII sind die Streifenschwerpunkte in halben Wellenlängen (erste Kolonne) und in Frequenzen (zweite Kolonne) angegeben. Am besten stimmen die nach der Formel (1) berechneten mit den beobachteten Frequenzen überein, wenn man den ersten Streifen als einen dreifachen, wie es oft in der Optik geschieht, annimmt. Dies vorausgesetzt, berechnen sich die Konstanten A und B zu: $A = 159,33 \cdot 10^6$, $B = 0,275 \cdot 10^6$.

Die dritte Kolonne in der Tab. VII enthält die mit diesen Konstanten berechneten Streifenlagen. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Streifenlagen befriedigend. Wird die Berechnung nach der Formel (1) weiter fortgesetzt, so bekommt man die ungefähre Lage der zwei weiteren Streifen, die sich teilweise überlagern.

Zwischen $\frac{A}{2} = 460$ mm und $\frac{A}{2} = 333$ mm verlieren die Streifen ihren regelmäßigen Verlauf. Sie werden wahrscheinlich durch eine neue Serie überlagert, die gegen $\frac{A}{2} = 460$ mm ihre Kante zu haben scheint.

Tabelle VII.

$\frac{A}{2}$ in mm	$\nu : 10^6$ beob.	$\nu : 10^6$ berechn.	Differenz
588,0	160,28	{ 159,88 159,60 160,43	— — —
582,5	161,80	161,80	0,00
575,0	163,91	163,78	- 0,18
566,5	166,37	166,20	- 0,17
557,5	169,05	169,23	+ 0,18
545,0	172,93	172,80	- 0,13
534,5	176,38	176,93	+ 0,60
519,2	181,53	181,60	+ 0,07
503,5	187,19	186,83	- 0,36
489,20	—	192,60	—
473,75	—	198,93	—

§ 13. Die oben beschriebenen im elektrischen Spektrum des Wassers beobachteten Dispersionserscheinungen verlangen für deren Erklärung die Zulassung der Existenz in Wasser von Schwingungszentren mit großen Eigenperioden.¹⁾

Es ist von der größten Bedeutung Anhaltspunkte zu gewinnen, die die Natur solcher Schwingungszentren aufzuklären gestatten.

A. R. Colley sieht die assoziierten Moleküle als Dispersionszentren in Flüssigkeiten an, und spricht die Vermutung aus, daß „bestimmte molekulare Umwandlungen im Gebiete des elektrischen Spektrums besonders scharf ihre Abbildung finden müssen“.²⁾

In einer interessanten Arbeit von F. Eckert³⁾ ist aus den Absorptionsmessungen im elektrischen Spektrum einiger Flüssigkeiten ein Schluß gezogen worden, daß die Absorptionszentren am wahrscheinlichsten die Komplexe der assoziierten Moleküle sind.

Zur Erkennung der Natur der Dispersionszentren in Flüssigkeiten kann die Untersuchung der Abhängigkeit der Dispersion und Absorption von der Temperatur sehr viel beitragen.⁴⁾

1) Vgl. dazu A. R. Colley, Physik Zeitschr. 10. S. 477. 1909.

2) A. R. Colley, a. a. O.

3) F. Eckert, Ber. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. S. 307. 1913.

4) Vgl. auch E. Schrödinger, Ber. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. S. 1167. 1913.

Eine solche Untersuchung ist von mir in zwei Richtungen durchgeführt worden.

1. Es ist die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur für die dispersionsfreien Teile untersucht worden.

2. Es ist der Einfluß der Temperatur auf den Dispersionsverlauf inmitten eines Dispersionsstreifens näher verfolgt worden.

§ 14. Da es geplant war, die Temperatur des Wassers bis an den Siedepunkt zu erhöhen, so waren die früher gebrauchten mit Siegellack gekitteten Wannen nicht mehr verwendbar. Eine Wanne folgender Konstruktion hat sich besonders bewährt.

Durch Biegen eines 2 mm dicken Messingbleches sind die Seitenwände und der Boden der Wanne gebildet worden; als

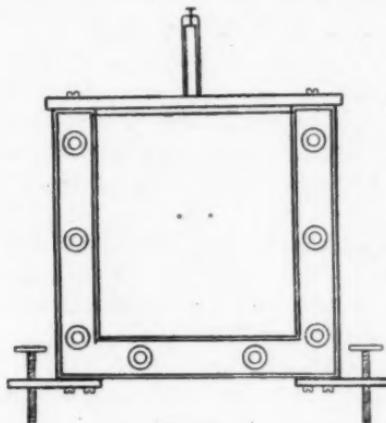


Fig. 10.

Vorder- und Hinterwand dienten zwei Glasscheiben von 1 mm Dicke, die durch je acht Schrauben gegen die Frontflächen der Wanne zugepreßt waren. Damit die Gläser nicht zerbrechen, waren dieselben durch Gummistreifen vom Metall abgetrennt. Die Einzelheiten der Konstruktion und das Aussehen der Frontwand ist ohne weiteres aus Fig. 10 ersichtlich. Die Dimensionen der Wanne waren $50,5 \times 9,7 \times 11,2$ cm³. Das Innere der Wanne und der oben befindliche metallische Maßstab wurden versilbert. Im übrigen blieb die Konstruktion die frühere. Als bestes bei höheren Temperaturen verwendbares

Klebemittel (zum Kleben der Löcher, durch welche die Drähte die Vorder- und Hinterwand der Wanne passieren) erwies sich, nach zahlreichen Proben, Gummi (in Benzol gelöst), welches die Erwärmung des Wassers bis 100° vorzüglich aushält. Die Temperaturerhöhung des Wassers geschah jetzt in viel bequemerer Weise: es wurde auf den Trogboden ein verzinnter auf einen Glasrahmen in Zickzacken aufgewickelter Kupferdraht gelegt, durch den von einem Transformator ein ungefähr 80 Amp. starker Strom geschickt werden konnte. Das Wasser wurde gewöhnlich vorläufig in einer Kältemischung von Eis und Kochsalz bis auf 0° abgekühlt. In die Wanne hineingebracht, hatte es eine Temperatur von 2° ; weiter wurde es mit dem Strome erwärmt. Die Messingwände, ebenso wie der Erwärmungsdrat übten auf die Ausbreitung der Wellen bei gegebenen Dimensionen des Troges keinen schädlichen Einfluß aus.¹⁾ Dagegen, dank der guten Wärmeleitfähigkeit der Wände und der von unten, und zwar von der ganzen Bodenfläche, stattfindenden Erwärmung, hielt sich die Temperatur in allen Schichten sehr konstant. Ein spezieller Umrührer war überflüssig; das Umrühren mit der beweglichen Brücke genügte vollständig. Die Wanne wurde gegen die Wärmeabgabe mit einer dicken Watteschicht von den Seiten umhüllt. Im Temperaturbereiche $2-25^{\circ}$ hielt sich die Temperatur während einer Messung bis auf $0,1-0,2^{\circ}$ konstant. Bei höheren Temperaturen kühlte sich das Wasser rascher ab; da aber die Erwärmung sehr leicht reguliert werden konnte, so konnte die Wassertemperatur immer auf $0,5^{\circ}$ konstant gehalten werden. Die Temperatur wurde an einem in Zehntelgrad geteilten Thermometer abgelesen.

§ 15. Die Resultate der Messungen des Brechungsindex bei verschiedenen Wassertemperaturen im Intervall $2-90^{\circ}$ sind graphisch in der Fig. 11 dargestellt. Die Kurven sind aus 16—28 Punkten konstruiert. Die Wellenlängen $\frac{A}{2} = 610,52, 330,41, 327,01, 315,10$ mm gehören den dispersionsfreien Gebieten an; $\frac{A}{2} = 160,48$ mm befindet sich, den Untersuchungen von Colley gemäß, in einem Gebiete mit

1) A. R. Colley, a. a. O.

Dispersion; $\frac{A}{2} = 1240,06$ mm gehört einem unbekannten Gebiete an. Es sind überall die Werte von n_r gegeben.

Für $\frac{A}{2} = 160,48$ mm ist die n_r -Kurve fast eine Gerade.

Will man hier für n_r eine Abhängigkeit von t von der Form

$$n_t = n_{17} - k(t - 17)$$

annehmen, so berechnet sich k zu

$$k = 0,0179.$$

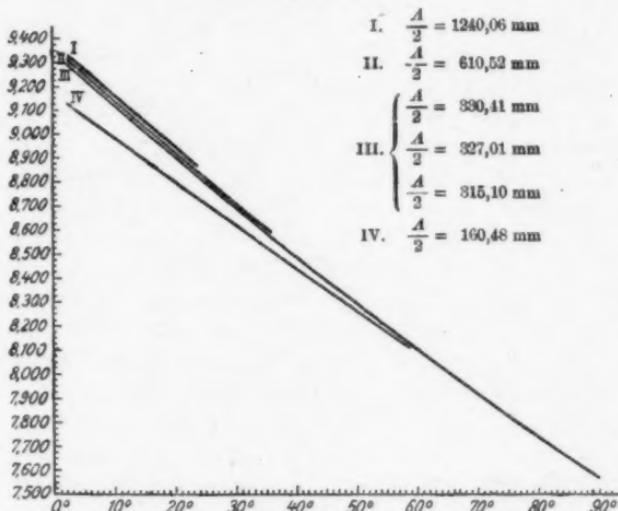


Fig. 11.

Für den Wellenbereich $\frac{A}{2} = 310-330$ mm ist die Abhängigkeit des n_r von t in der Form von

$$n_t = n_{17} - k_1(t - 17) + k_2(t - 17)^2$$

angenommen worden. Dann berechnen sich die Konstanten zu

$$k_1 = 0,0214$$

$$k_2 = 0,000026.$$

Mit diesen Konstanten lassen sich die Brechungsindizes in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur im Intervall von 2-90° mit einer Genauigkeit von 0,1 Proz. wiedergeben.

Betrachtet man den Verlauf der n_r -Kurve für die zwei dispersionsfreien Gebiete (Kurven II und III), so bemerkt man,

daß die Kurve II bis ungefähr 40° höher, als die Kurve III verläuft. Bei höheren Temperaturen fallen beide Kurven zusammen. Vom Standpunkte der Assoziationshypothese kann dieser Umstand in der Weise gedeutet werden, daß bis ungefähr 40° ein Zerfall derjenigen Molekülkomplexe, die die Dispersionserscheinungen im Gebiete von $\frac{4}{2} = 591$ mm bis

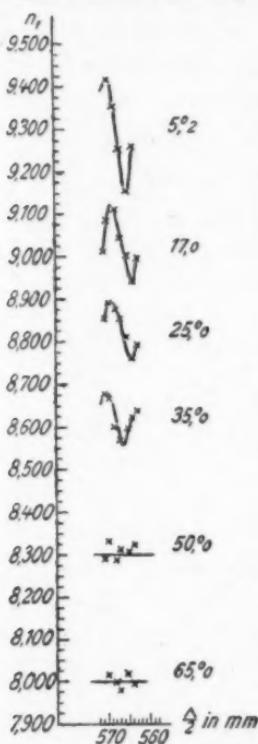


Fig. 12.

Kondensatoren von der in Fig. 4 gezeichneten Form auf die Drähte aufgelegt werden. Durch die Verschiebung des linken Kondensators wird die Wellenlänge des primären Systems CA

1) A. R. Colley, „Eine Methode der genauen Untersuchung der engen Dispersionsstreifen usw.“ Berichte der Warschauer Univ., 1915.

$\frac{4}{2} = 333$ mm hervorrufen, dauert. Je größer die Molekülkomplexe sind, desto niedriger ist die Temperatur, bei welcher der Zerfall zu erwarten ist. Es müssen, mit anderen Worten, die n_r -Kurven bei einer desto höheren Temperatur zusammenfallen, je kleiner die Wellenlänge ist. Die Erfahrung bestätigt dies, wie es in der Fig. 11 zu sehen ist.

§ 16. Die Frage, ob die Dispersionszentren bei einer bestimmten Temperatur wirklich verschwinden, läßt sich nur dadurch beantworten, daß die Ausmessung der Dispersionskurven bei einer Reihe immer wachsender Temperaturen durchgeführt wird. Leider ist die Beantwortung der Frage im vollen Umfange wegen der sehr großen Umständlichkeit der hier angewandten Methode sehr schwierig. Es ist erfreulich, daß A. R. Colley eine neue Methode ausgearbeitet hat¹⁾, die die Arbeitszeit in hohem Grade erspart. In den wesentlichsten Zügen besteht die Methode darin, daß beiderseits der Brücke A (Fig. 1) zwei kleine

vergrößert. Durch die Verschiebung des linken Kondensators kann der erste Knoten immer in einer bestimmten Lage gehalten werden. Man braucht dann nur die Kondensatorverschiebungen zu kalibrieren. Ist die Wassergrenze einmal im ersten wahren Knoten eingestellt, so braucht die Wanne während der Durchmessung eines bestimmten (kleinen) Wellenlängenbereiches nicht verschoben zu werden. Nach dieser Methode habe ich das Temperaturverhalten des zwischen $\frac{A}{2} = 571$ mm und $\frac{A}{2} = 563$ mm liegenden Streifens untersucht. Fig. 12 zeigt das Aussehen der Dispersionskurve bei verschiedenen Temperaturen. Bei 50—60° ist der Streifen nicht mehr zu sehen.¹⁾

In derselben Richtung sind noch folgende Messungen gemacht worden.

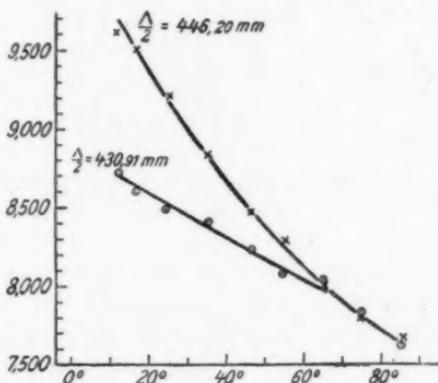


Fig. 13.

Es ist der Verlauf der Temperaturkurven des Brechungsindex (nach der früheren Methode) für $\frac{A}{2} = 446,20$ mm und $\frac{A}{2} = 430,91$ mm verfolgt worden. Das sind gerade diejenigen Halbwellenlängen, die dem Maximum und Minimum des

1) Infolge der durch die Kondensatoren bedingten Vergrößerung der Dämpfung ist $n_{\text{Max.}} - n_{\text{Min.}}$ kleiner, als früher (vgl. Fig. 9).

Brechungsindex im sehr tiefen Streifen entsprechen. Die betreffenden, in der Fig. 13 abgebildeten Temperaturkurven zeigen ohne weiteres, daß der Streifen bei ungefähr 65° verschwunden ist. Wünschte man hier vom „Temperaturkoeffizienten“ des Brechungsindex zu sprechen, so würde sich dieser (im Temperaturintervall von $12-65^{\circ}$) für $\frac{A}{2} = 446,20$ mm zu 0,031 und für $\frac{A}{2} = 430,91$ mm zu 0,014 berechnen.

Die oben beschriebenen Ergebnisse lassen sich am ungewöhnlichsten dadurch erklären, daß die Dispersionszentren, welche durch so große Eigenperioden charakterisiert sind, gewisse, vielleicht sehr kompliziert gebaute Molekularaggregate sind, die mit steigender Temperatur zerfallen.

§ 17. Zugunsten der Assoziationshypothese sprechen auch die Beobachtungen über die *Absorption* der elektromagnetischen Wellen durch Wasser. Die quantitative Bestimmung der Absorption ist bei der in dieser Untersuchung angewandten Messungsmethode unmöglich. Trotzdem erlauben mir meine Beobachtungen, bezüglich der Absorption ganz bestimmt folgendes zu bemerken.

In Übereinstimmung mit den Beobachtungen anderer Autoren konnte ich ebenfalls feststellen, daß die übliche Leitfähigkeit des Wassers auf die Absorption der Wellen nur verschwindend kleinen Einfluß hat. Bei einem Anwachsen der Leitfähigkeit vom Werte $\sigma = 3,5-4,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}^{-1}$ (frisch destilliertes Wasser) bis auf $\sigma = 20,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}^{-1}$ (nach 3 Monaten Arbeit) konnten keine Änderungen in den Dispersionserscheinungen und der Größe der Absorption festgestellt werden. Dennoch konnte ich bei meinen Versuchen das Vorhandensein einer Absorption in zuverlässiger Weise konstatieren. Die Größe der Absorption war dabei von der Temperatur besonders deutlich abhängig, und zwar in *entgegengesetztem* Sinne, als es der Fall wäre, falls die Absorption der Wellen von der Leitfähigkeit des Wasser abhinge. Hatte nämlich das Wasser eine Temperatur von etwa $2-6^{\circ}$, so konnte (bei den bei meinen Versuchen vorhandenen Erregungsbedingungen) kaum der sechste Knoten in Wasser beobachtet werden. Je mehr sich das Wasser erwärmte, desto deutlicher traten die entfernten Knoten

auf, bis schließlich beim Überschreiten von 50—60° auch alle entfernten Knoten ebensogut, wie die ersteren, zu beobachten waren. Die „Aufklärungstemperatur“ des Wassers trat für kürzere Wellen bei einer höheren Temperatur als für längere auf.

§ 18. Resultate:

1. Es ist das elektrische Wasserspektrum im Wellenlängenbereiche von $\frac{\lambda}{2} = 300$ mm bis $\frac{\lambda}{2} = 620$ mm gemessen worden, wobei auch bei Messungen aus den ersten Knotenlagen in Wasser eine Genauigkeit der Resultate von 0,1 bis 0,2 Proz. erreicht wurde.

2. Zwischen $\frac{\lambda}{2} = 333$ mm und $\frac{\lambda}{2} = 594$ mm weist das Wasserspektrum einen komplizierten Bau auf, und besteht aus einer großen Zahl enger Dispersionsstreifen.

3. Die Streifen scheinen nach dem Gesetz angeordnet zu sein, welches für den Bau des „Bandenspektrums“ maßgebend ist.

4. Der von A. R. Colley entdeckte dispersionsfreie Teil ist auch durch diese Messungen bestätigt worden; ein weiterer ähnlicher Teil ist zwischen $\frac{\lambda}{2} = 594$ mm und $\frac{\lambda}{2} = 620$ mm aufgefunden worden.

5. Es ist die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur in zwei dispersionsfreien Gebieten untersucht und die Temperaturkoeffizienten berechnet worden.

6. Mit steigender Temperatur zeigen die Streifen eine Tendenz, weniger ausgesprochen zu werden, um bei 50—60° zu verschwinden.

7. Die Absorption der Wellen nimmt mit steigender Temperatur deutlich ab.

8. Die beobachteten Tatsachen lassen sich am ungezwungensten dadurch erklären, daß man die Dispersionszentren als größere Molekülkomplexe ansieht, die mit steigender Temperatur zerfallen.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Warschauer Universität verrichtet und lag schon im Jahre 1914 in deutscher Sprache zum Drucke bereit. Jedoch der Weltkrieg und die auf ihn in Rußland erfolgten Ereignisse verhinderten ihre rechtzeitige Veröffentlichung.

Prof. A. R. Colley, der mich zu dieser Untersuchung angeregt hatte und sich an dem Verlaufe der Arbeit am lebhaftesten interessierte, ist nun jetzt nicht mehr am Leben. Er starb eines entsetzlichen Todes als Opfer des Bürgerkrieges. Es sei mir gestattet, mit ehrfurchtsvoller Dankbarkeit dieses talentvollsten Physikers und meines besten Freundes hier zu gedenken.

Sofia, 25. April 1921.

(Eingegangen 9. Mai 1921.)

**2. Die thermodynamische Theorie der Kapillarität von van der Waals, die Theorie¹⁾ der Kapillarschicht von G. Bakker und die theoretische Isotherme von James Thomson;
von G. Bakker.**

James Thomson verdanken wir die Hypothese, daß die Isotherme innerhalb des Sättigungsgebietes nur scheinbar diskontinuierlich sind. Da aber die Phasen, deren Dichte zwischen ϱ_1 (Flüssigkeitsdichte) und ϱ_2 (Dampfdichte) gelegen sind²⁾, als abgesonderte Phasen betrachtet, teilweise metastabil und teilweise labil sind, so hat Thomson noch die weitere Hypothese aufgestellt, daß die fraglichen Zustände auf der komplettierten Isotherme *HGFPK* (Fig. 1) in der Grenz-

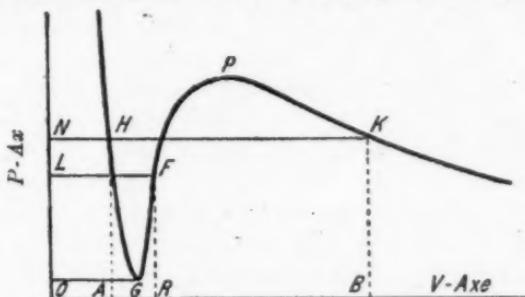


Fig. 1.

schicht zwischen Flüssigkeit und Dampf sich wirklich vorfinden könnten.³⁾ In seiner Theorie der Kapillarität hat nun van der Waals gezeigt, daß vermittelst der Mitwirkung der (unendlich vielen) Schichten in nicht homogen equilibrierten

1) Dieser Name ist durch van der Waals nicht glücklich gewählt. Die Arbeit ist vielmehr eine Theorie der Kapillarschicht.

2) Die Dichte ϱ_1 korrespondiert mit dem Punkt *H* und die Dichte ϱ_2 korrespondiert mit dem Punkt *K* in Fig. 1.

3) J. Thomson, Proc. Roy. Soc. London. 20. 1. 1871.

Phasen der Kapillarschicht die Dichten zwischen ϱ_1 und ϱ_2 sich wirklich vorfinden können. Van der Waals findet weiter für alle Punkte der Kapillarschicht nur *einen einzigen Druck*, nämlich einen Druck gleichwertig mit dem Dampfdruck.¹⁾ Will man also nach der Theorie von van der Waals die Zustände in der Kapillarschicht mit der Isotherme in Zusammenhang bringen, so werden diese Zustände nicht durch die Kurve *H G F P K* (Fig. 1) von James Thomson gegeben, sondern durch die Isobare *H K* (Fig. 1). Im allgemeinen habe ich aber von den Besprechungen über diese Frage in Enzyklopädien und Handbüchern *nicht* diesen Eindruck bekommen. Vielmehr wird es vorgestellt, als hätte van der Waals die Zustände in der Kapillarschicht (Dichte und Druck) betrachtet, als wären sie durch die Punkte der theoretischen Isotherme von James Thomson (Kurve *H G F P K* in Fig. 1) gegeben.

Kein Geringerer als Minkowski hat sich in bezug auf diesen Gegenstand getäuscht. In seinem Artikel in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. V, S. 602 bis 608, wo er die Arbeiten von van der Waals und Bakker zusammen behandelt²⁾, sagt er³⁾: „Nunmehr wird angenommen, daß die Abhängigkeit des p und ϱ und der Temperatur auch in der Übergangsschicht durch eben dieselbe van der Waals'sche Formel (35)⁴⁾ wie in den homogenen Phasen dargestellt wird, was freilich mehr an die Macht dieser Formel glauben heißt, als es in ihrer Ableitung eine Stütze fände.“ Diese letzte Bemerkung wäre zweifellos richtig, wenn so etwas postuliert wäre, aber das ist nicht der Fall. Wiederholt wird auf die Bedeutung der Größe p gewiesen. Allerdings wird dieser Druck p , der nichts anderes darstellt als die Ordinaten der theoretischen Isotherme, eingeführt, aber dieser Druck bezieht sich *nicht* auf den Zustand des betrachteten Punktes in der Kapillarschicht selbst. Das Mißverständnis hat folgenden Grund. In der Theorie von van der Waals' wird der

1) A. a. O. § 8.

2) Über die eigne Arbeit von van der Waals' sagt Minkowski fast so gut wie nichts.

3) A. a. O. S. 606, Zeile 22.

4) Nämlich die bekannte Formel:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad \text{oder} \quad p + a\varrho^2 = \frac{RT\varrho}{1-b\varrho}, \quad \text{wo } \varrho = \frac{1}{v}.$$

kinetische Druck, der nur von den Stoßkräften und nicht von Kräften, die ein Wirkungsfeld wie die molekularen Anziehungskräfte haben, abhängt, in einem Punkt der Kapillarschicht als eine Funktion der Dichte und nicht als von deren Gradient abhängig, betrachtet. Der kinetische Druck kann deshalb als gleichwertig mit dem in der homogenen Phase betrachtet werden, da auch in der Kapillarschicht die Stoßkräfte allein den kinetischen Druck verursachen.¹⁾ Der kinetische Druck kann deshalb durch die Formel $p + a \varrho^2$ dargestellt werden, worin nun p nichts anderes ist als der Druck in einer homogenen Phase durch denjenigen Punkt der theoretischen Isotherme dargestellt, *wozu dieselbe Dichte gehört als die Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht*. Der Druck p ist also der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht nur zugeordnet und wird *bloß als Rechnungsfunktion eingeführt*. Wenn deshalb Minkowski a. a. O. sagt: „Wir setzen allgemein $\pi = p + a \varrho^2$ und nennen p den hydrostatischen Druck“, so ist das nicht richtig gesagt, und wenn er weiter fortfährt: „Nunmehr wird angenommen, daß die Abhängigkeit des p von ϱ und der Temperatur auch in der Übergangsschicht durch eben dieselbe van der Waalssche Formel (35) (vgl. oben) wie in den homogenen Phasen dargestellt wird“, so täuscht er sich, denn, wie schon oben bemerkt, werden nach van der Waals die Zustände in den Punkten der Kapillarschicht durch die Isobare dargestellt.

Eine andere Frage ist, daß die Betrachtung von van der Waals unvollständig ist. Heute wissen wir, daß *in jedem Punkt* der Kapillarschicht das Gesetz von Pascal verletzt ist und daß der Zustand in einem Punkt außerhalb durch die Dichte durch *zwei* Drucke p_N und p_T gegeben ist (selbstverständlich bei einer bestimmten Temperatur). p_N ist dem Dampfdruck gleich und wirkt in einer Richtung senkrecht zu den Niveauflächen, während p_T den Druck in der Längsrichtung der Niveauflächen darstellt.²⁾ Van der Waals betrachtet nur den Druck p_N ; den Druck p_T hat er übersehen. —

1) Diese Auffassung ist eine unmittelbare Folge der Hypothese von van der Waals' über die Entropie in einem Punkt der Kapillarschicht. Vgl. G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie 34, S. 174. 1900.

2) Alle Punkte einer Niveaufläche haben dieselben Eigenschaften.

Wenn man von Punkt zu Punkt den Wert vor p_T in der Kapillarschicht untersucht und die Kurve, welche p_T als Funktion von $1/\rho$ (ρ = Dichte) darstellt, in das Diagramm der Isotherme einsetzt, so erhält man die punktierte Kurve in Fig. 2¹⁾.) In seinem Lehrbuch der phys. Chemie 2. S. 285 sagt Dr. Karl Jellinek, wenn er die Zustände in den Punkten der Kapillarschicht bespricht: „Jeder Schicht der Kapillarzone entspricht ein Abszissenwert in Fig. 4 (= Fig. 1 in dieser Arbeit) zwischen v_B und v_A . Die Substanz zeigt nun aber in jeder Schicht, wo ihre Temperatur und ihr spezifisches Volumen genau definiert ist, nicht etwa einen einzigen mano-

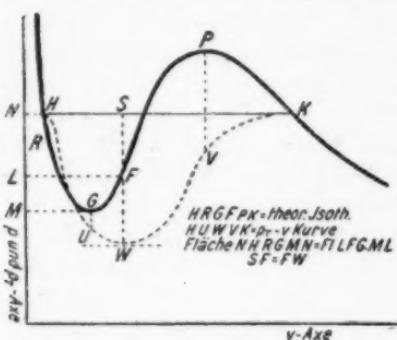


Fig. 2.

metrisch messbaren Druck, sondern nach verschiedenen Richtungen im allgemeinen einen verschiedenen. Senkrecht zur Grenzfläche zeigen alle Schichten den Dampfdruck, parallel zur Grenzfläche aber steigt der Druck, wenn man auf der Abszissenachse von Fig. 4 (= Fig. 1) von v_B nach v_A fortschreitet, wie sich theoretisch zeigen lässt, zunächst zu einem Maximum an, fällt dann bis zum Dampfdruck, sinkt unter diesen Wert hinab, erreicht ein Minimum, das bei genügend tiefer Temperatur stets unter der Abszissenachse liegt (Zug statt Druck) und steigt dann wieder bei v_A bis zum Dampfdruck an. Man bekommt also für die Abhängigkeit des Druckes p_T ²⁾ von der Schichttiefe³⁾ der Kapillarzone eine

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. S. 62. 1906 u. 14. S. 618. 1904; Zeitschr. f. phys. Chemie 56. S. 103. 1906.
 2) Der Einfachheit halber benutze ich hier die Schreibweise in meinen Arbeiten.
 3) Unter Schichttiefe versteht Jellinek den Abstand eines Punktes der Kapillarschicht bis zu der Grenzfläche der Kapillarschicht an der Seite des Dampfes. In meinen Arbeiten wird der Abstand eines Punktes der Kapillarschicht bis zu der Grenzfläche an der Seite der Flüssigkeit

S-Kurve, die aber natürlich nicht genau den gleichen Verlauf wie die aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung berechnete *S*-Linie hat. Man kann also in bezug auf die Richtung parallel zur Grenzfläche sagen, daß die dem Dampf zugewendeten Schichten der Kapillarzone sich als verdichteter Dampf, die der Flüssigkeit zugewendeten Schichten als gedehnte Flüssigkeit darstellen.“ Hierzu bemerke ich: Sei es, daß man den Druck p_T als Funktion von $1/\rho$ oder als Funktion der Schichttiefe betrachtet, man erhält in beiden Fällen eine Kurve wie die punktierte in Fig. 2.¹⁾ Auch Jellinek hat sich also getäuscht und jetzt in bezug auf den durch Bakker untersuchten Druck p_T . Aus Obigem geht hervor, daß es nicht gelungen ist, die Zustände in der Kapillarschicht mit dem Isothermeteil *H G P K* (Fig. 1) in *derjenigen Weise* wie James Thomson es sich dachte, in Zusammenhang zu bringen. Wenn aber in einer Theorie, wie die von Maxwell, Rayleigh und von der Waals es *wohl* gelungen war, *auf die besagte Weise* die durch James Thomson vermutete physische Bedeutung der Kurve *H G P K* (Fig. 1) zu finden, so würde man doch *solch eine* Interpretation dieses Teiles der theoretischen Isotherme nicht zu viel Wert beilegen. Die besagten Theorien ersetzen nämlich die Materie der Kapillarschicht durch eine Lamelle *eines stetig ausgebreiteten Agens*. Wenn man nun beachtet, daß die Kapillarschicht, ausgenommen in der Nähe der kritischen Temperatur, nicht mehr als drei bis vier Molekelreihen²⁾ stark ist, so hat die Substitution des stetig ausgebreiteten Agens nur allein darum Sinn, weil die Molekel in der Kapillarschicht ebensowenig als die Molekel im Innern der Flüssigkeit oder des Dampfes feste Positionen in bezug aufeinander haben; vielmehr ändern sich ihre Lagen zufolge der Wärmebewegung unaufhörlich auf äußerst komplizierte Weise. (Man denke nur an die Ursache der Brownschen Bewegung.) In *jedem* Punkt der Kapillarschicht kann

durch h dargestellt. Man könnte also h die Schichttiefe nennen, aber jetzt in bezug auf die Grenzfläche der Kapillarschicht an der Seite der Flüssigkeit.

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. S. 59. 1906.

2) In der Nähe des Schmelzpunktes höchstens drei. Vgl. Ann. d. Phys. 54. S. 294. 1918.

man deshalb von einer *mittleren* Dichte nach der Zeit sprechen und es ist *diese* Dichte, die durch die Dichte des klassischen stetig ausgebreiteten Agens representiert wird. *Diese* Dichte soll sich nun stetig ändern von der Dichte ϱ_1 der Flüssigkeit bis zu der Dichte ϱ_2 des Dampfes. Es ist aber nicht fraglich, daß im allgemeinen die auf diese Weise erhaltenen Werte von den wirklichen mittleren Werten nach der Zeit verschieden sein können; das Bild, das wir erhalten, bleibt also skizzenhaft. Da der Hauptinhalt der van der Waalsschen Arbeit in der Untersuchung der Abhängigkeit zwischen der Dichte in einem Punkt der Kapillarschicht und der Schichttiefe dieses Punktes besteht, gilt unsere Bemerkung in hohem Maße für diese Arbeit. Daß Minkowski bei seiner Besprechung der Theorien zur Vermeidung von Diskontinuitäten der Dichte fast so gut wie nichts über die eigne Arbeit von van der Waals sagt, hat hierin seinen Grund.¹⁾ Alles was Minkowski über diese Arbeit sagt, besteht in dem Folgendem. Auf S. 607 seiner Arbeit sagt er: „Für die vollständige Durchführung des durch hydrodynamische (oder thermodynamische) Prinzipien gelieferten Ansatzes hat sich ein spezielles Kraftgesetz der Kohäsion als hervorragend geeignet erwiesen, das nun hier sogleich zugrunde gelegt werde, nämlich das in (28) angeführte, wobei die Potentialfunktion für zwei Maßeinheiten in einer Entfernung r durch:

$$-k \frac{e^{-cr}}{r}$$

dargestellt wird und k wie c positive Konstanten sind.“²⁾ Minkowski fängt nun unmittelbar mit der Behandlung der Arbeit von Bakker an. Allein sagt er noch auf S. 607³⁾: „Die der Wellenlinie ($\varrho_A > \varrho > \varrho_B$) (Fig. 1 dieser Arbeit) entsprechenden Kombinationen p , $1/\varrho$ ⁴⁾ sind für homogene Phasen

1) Ich habe das Vorrecht gehabt, mit Minkowski kurz vor seinem bedauernswerten frühzeitigen Verscheiden über diese Frage zu korrespondieren.

2) Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften V, Art. 17. S. 604.

3) Wie wir schon oben bemerkt haben, war das nicht ganz richtig.

4) Diese Kombinationen p , $1/\varrho$ gibt die Wellenlinie $H G P K$ in Fig. 1 oben. Wie schon oben bemerkt, täuscht sich aber Minkowski hinsichtlich dieser Wellenlinie in bezug auf die Zustände in der Kapillarschicht.

instabil, in der Übergangsschicht findet van der Waals sie nun stabil.“¹⁾ Trotz der reservierten Stellung von vielen Forschern zu Theorien der Kapillarschicht, wobei zur Vermeidung von Diskontinuitäten die Übergangsschicht durch eine Lamelle eines stetig ausgebreiteten Agens ersetzt wird, bin ich der Meinung, daß dennoch solche Theorien ganz entschieden Daseinsberechtigung haben, denn soll man den detaillierten Untersuchungen über die Zustände der Kapillarschicht von Punkt zu Punkt nicht allzugroßen Wert beilegen, so wird es anders, wenn man die betrachteten Größen über die ganze Dicke der Schicht integriert. Die Grenzen dieser Integralen können nämlich mittels unserer Kenntnis von den homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) bestimmt werden und auf diese Weise kann ein Mittelwert für die betrachtete Größe gefunden werden. Überdies kann man solch einen Mittelwert bisweilen thermodynamisch kontrollieren. Ein Beispiel hiervon ist der Mittelwert des Druckes in der Längsrichtung der Kapillarschicht. Wenn in einem Punkt der Kapillarschicht dh die Differentiale einer Strecke senkrecht zu den Niveauflächen darstellt, so wird der totale Druck in der Längsrichtung der Kapillarschicht (mit der Breite 1) gegeben durch:

$$\int_1^2 p_T dh,$$

worin p_T den Druck in einem Punkt in der Längsrichtung der Niveauflächen darstellt. (Vgl. oben.) Die Indices 1 und 2 geben symbolisch die Grenzen von h bei der Flüssigkeit bzw. den Dampf an. Ist ζ die Dicke der Kapillarschicht, so könnte man deshalb auch schreiben:

$$\int_0^\zeta p_T dh.$$

1) A. a. O. S. 607. In Fig. 22 (S. 607) ist die Ordinate p_1 in meiner Arbeit durch p_0 angegeben, während p in meiner Arbeit durch p_1 dargestellt wird. In späteren publizierten Arbeiten benutzte ich resp. p_N und p_T . Weiter bemerke ich, daß Minkowski meine Formel für die Oberflächenspannung (a. a. O. S. 608, Regel 5) nicht ganz richtig schreibt. Rechts ist nämlich der Faktor $\varrho_1 - \varrho_2$ weggefallen.

Der mittlere Druck \bar{p}_T wird also gegeben durch:

$$\bar{p}_T = \frac{1}{\zeta} \int_1^2 p_T dh.$$

Bakker hat nun diesen Druck \bar{p}_T mit der theoretischen Isotherme in Zusammenhang gebracht. Ist nämlich im Punkt F (Fig. 1 und 2)

Oberfläche $NHGMN$ = Oberfläche $LFGML$
und hat also das thermodynamische Potential in den Punkten H , F und K denselben Wert, so fand er:

$$\bar{p}_T = RF.$$

In bezug auf die letzte Gleichung sei mir eine Bemerkung gestattet, welche ich schon öfters machte, zu wiederholen: die Dicke der Kapillarschicht ist keine Größe, wie eine Wellenlänge des Lichtes, welche scharf angegeben werden kann. Es ist eine Strecke, innerhalb deren die inhomogenen Verhältnisse hervortreten. Nun erhielt ich nach meinen Beobachtungen für eine Strecke, die einzelne Prozente *kleiner* sein sollte als die „Dicke“ der Kapillarschicht, den Ausdruck:

$$\frac{15}{16} \frac{H}{p_N - p},$$

worin H die Oberflächenspannung, p_N den Dampfdruck und p die Ordinate RF des Punktes F in der Fig. 1 darstellen. Es war also angemessen, für die Dicke ζ der Kapillarschicht den Ausdruck:

$$\zeta = \frac{H}{p_N - p}$$

zu nehmen. Andererseits ist streng:

$$H = (p_N - \bar{p}_T) \zeta$$

und deshalb:

$$\bar{p}_T = p = RF.$$

1) A. a. O. S. 608, Regel 6 schreibt Minkowski:

$$2x_0 = \frac{15}{16} \frac{\gamma_0 H}{p_0 - p_1};$$

$2x_0$ ist die Dicke der Kapillarschicht, welche ich durch ζ dargestellt habe, $\gamma_0 H$ ist die Oberflächenspannung, in meiner Arbeit durch H angegeben. Weiter ist $p_0 = p_N$ und $p_1 = RF$.

Weiter wird gezeigt, daß mit derselben Annäherung das spezifische Volumen¹⁾ der Kapillarschicht nun gleichzeitig der Abszisse des Punktes F (Fig. 1) gleichgesetzt werden kann. Nennen wir v das spezifische Volumen der Kapillarschicht und v_s der Abszisse des Punktes F , so wird als: $v = v_s$.²⁾ Durch Ausdehnung dieser Betrachtungen auf gekrümmte Kapillarschichten, speziell auf die kugelschalenförmigen Kapillarschichten, die alle kugelförmigen Flüssigkeitströpfchen und

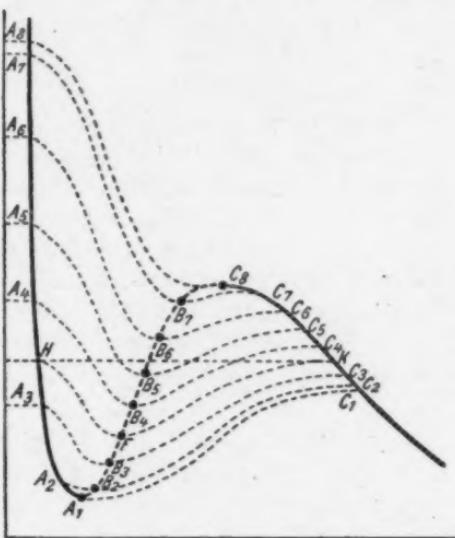


Fig. 3.

kugelförmigen Dampfblasen, die bei der betrachteten Temperatur möglich sind, umhüllen, gelangt man zu dem folgenden Satz: Fig. 3.

Jedes Punktpaar der Isotherme, wofür das thermodynamische Potential denselben Wert hat, wie A_8 und C_8 , A_7 und

1) Volumen pro Einheit der Maße. Die Oberfläche der Kapillarschicht wird also sehr groß.

2) Wenn man p_T betrachtet als den Arbeitsfaktor der auswendigen Arbeit $p_T d v$ bei isothermischer Krümmungsänderung der Kapillarschicht, so kann man thermodynamisch zeigen, daß $v = v_s$ eine Folge ist von $p_T = p$.

C_1 usw., entspricht oberhalb des gradlinigen Stückes $HK^1)$ der empirischen Isotherme einem Flüssigkeitströpfchen derart, daß der Zustand innerhalb dieses Tröpfchens und der des Dampfes, welcher es umhüllt, durch die Lage dieses Punktpaares eindeutig bestimmt ist. Die Ordinaten dieses Punktpaares geben nämlich den Druck und den reziproken Wert der Dichte in der Flüssigkeit und in dem Dampf. Ebenso entspricht jedes Punktpaar unterhalb des gradlinigen Stückes HK der empirischen Isotherme einer kugelförmigen Dampfblase. Der Zustand dieser Dampfblase und der Flüssigkeit, welche die Dampfblase umhüllt, ist wieder durch die Lage des Punktpaares (wie A_3 und C_3 , A_2 und C_2 usw.) eindeutig bestimmt. (In A_3 und C_3 usw. sind wieder die Werte des thermischen Potential gleich.)

Konstruiert man nun weiter in demselben Diagramm der Isotherme für jede kugelschalenförmige Kapillarschicht, welche im ersten Falle ein kugelförmiges Flüssigkeitströpfchen und im zweiten Falle eine kugelförmige Dampfblase umhüllt, den Punkt, der durch seine Ordinaten den Druck \bar{p}_T bzw. das spezifische Volumen dieser Kapillarschichten darstellt, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte gerade den labilen Teil der theoretischen Isotherme.

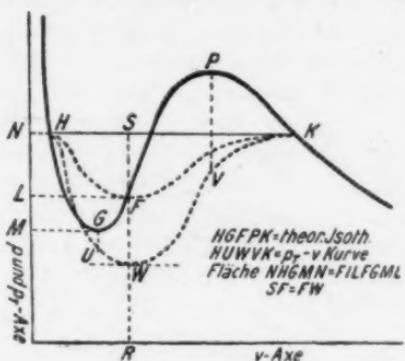
Ist für einen Punkt in einer kugelschalenförmigen Kapillarschicht (einschließlich der ebenen) p_N der Druck senkrecht zu den Niveauflächen²⁾ und p_T der Druck senkrecht dazu (also in der Längsrichtung der Niveauflächen), so geben die punktierten Linien in Fig. 3 jedesmal für eine kugelschalenförmige Kapillarschicht (einschließlich der ebenen) den Zusammenhang zwischen der halben Summe $\frac{p_N + p_T}{2}$ einerseits und dem reziproken Wert der Dichte $\left(v = \frac{1}{\varrho}\right)$ andererseits oder analytisch:

$$\frac{p_N + p_T}{2} = f\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

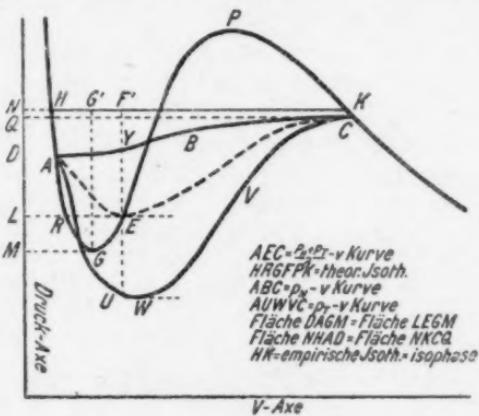
1) Die Isobare.

2) Diese Flächen sind ersichtlich Flächen konstanter Dichte und, ausgesondert bei der ebenen Kapillarschicht, konzentrische Kugelflächen.

In Fig 4 gibt die Kurve HFK diesen Zusammenhang für die ebene Kapillarschicht, während Fig. 5 Bezug hat auf eine kugelschalenförmige Kapillarschicht, die eine Dampfblase um-



hüllt. Auch für die Kapillarschicht eines Flüssigkeitströpfchens habe ich die Kurve studiert. Für die vollständige Durchführung dieser Untersuchung war es notwendig für die Attraktions-



kräfte der Kohäsion eine Potentialfunktion einzuführen. Nun hat sich ein spezielles Kraftgesetz als hervorragend geeignet erwiesen, das nun hier sogleich zugrunde gelegt wurde, näm-

lich das Kraftgesetz, wobei die Potentialfunktion für zwei Maßeinheiten in einer Entfernung r durch

$$-f \frac{e^{-qr}}{r}$$

dargestellt wird und f und q positive Konstanten sind. Diese Funktion, welche allen Anforderungen für die Attraktionskräfte der Kapillaritätstheorie genügt,¹⁾ ist außerdem die einzige Potentialfunktion, wofür die Attraktion einer homogenen Kugel auf einen äußeren Massenpunkt eine stetig abnehmende Funktion des Abstandes zwischen Massenpunkt und Kugelzentrum²⁾. Ich fand nun, daß die Minima der Kurve:

$$\frac{p_N + p_T}{2} = f\left(\frac{1}{q}\right)^3$$

gerade auf dem labilen Teil der theoretischen Isotherme liegen. Diese Eigenschaft war unabhängig von der Form für den thermischen Druck. Wir können den labilen Teil der theoretischen Isotherme deshalb auch folgenderweise interpretieren:

Konstruiert man für alle kugelschalenförmige Kapillarschichten, welche bei der betrachteten Temperatur möglich sind und kugelförmige Flüssigkeitströpfchen oder Dampfblasen umhüllen, die Kurve, welche den Mittelwert $p = \frac{p_N + p_T}{2}$ der Maximal- und Minimaldrucke für irgendeinen Punkt dieser kugelschalenförmigen Kapillarschichten in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Densität darstellt, so bilden die Minima dieser Kurve gerade den labilen Teil der theoretischen Isotherme.

Kamerlingh Onnes und Keesom⁴⁾ fassen den Satz folgenderweise sehr kurz und einfach: „der Teil c de (a. a. O. Fig. 14, S. 665) oder $A_1 FC_8$ (in Fig. 3 oben) ist Ort der Minima der Kurven, die für verschiedene Krümmungen der Kapillar-

1) J. D. van der Waals, Zeitschr. f. phys. Chemie 13. S. 657. 1894 und G. Bakker, Koninklyke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Dezember 1899.

2) G. Bakker, ebenda Okt. 1899. Vgl.: Zeitschr. f. phys. Chemie, 89. S. 12. 1914.

3) Man beachte, daß der Druck in einem Punkt der Kapillarschicht abhängig von der Richtung ist; p_N ist der maximale und p_T der minimale Wert des (hydros.) Druckes in dem betrachteten Punkte.

4) Enzyklopädie der Math. Wissenschaft. 5. S. 667 u. 668. Fußn. 159.

schicht das Mittel von den Drucken senkrecht und parallel der selben längs einer der beiden coexistierenden homogenen Phasen verbindenden Linien als Funktion von v darstellen.

Zusammenfassung.

1. Die Meinung, daß van der Waals die Zustände in den verschiedenen Punkten der (ebenen) Kapillarschicht als Zustände durch den Teil *H G FPK* (Fig. 1) der theoretischen Isotherme gegeben, betrachtet hat und daß van der Waals also eine Hypothese von James Thomson bestätigt hätte, beruht auf einem Mißverständnis.

2. Jellinek täuscht sich, wenn er meint, daß die durch Bakker untersuchte Relation zwischen dem Druck p_T in der Längsrichtung der Kapillarschicht und der Schichttiefe durch eine Kurve mit einem Maximum sowohl als mit einem Minimum dargestellt wird. Die besagte Kurve hat zwar ein Minimum aber kein Maximum.

3. Nicht wie James Thomson es sich dachte, sondern auf andere Weise können die Zustände der Kapillarschicht mit denen des labilen Teiles der theoretischen Isotherme verknüpft werden. Nicht die Zustände in den verschiedenen Punkten einer einzigen Kapillarschicht, sondern die Zustände aller kugelschalenförmigen Kapillarschichten, die bei der betrachteten Temperatur möglich sind, sollen in Betracht gezogen werden.

(Eingegangen 11. Mai 1921.)

**3. Messung von Thomsons effekten bei niederen
Temperaturen;**
von G. Borelius und F. Gunneson.

§ 1. Meßmethode.

Die vorliegenden Messungen an Thomsons effekten zwischen etwa 100° und 400° absolut sind nach einer neulichst von Borelius¹⁾ angegebenen Methode ausgeführt worden. Die Methode ist für tiefe Temperaturen besonders geeignet und war schon für Messungen an Kupfer benutzt worden.

Die Methode bezieht sich auf den thermischen Gleichgewichtszustand an einem stromdurchflossenen Drahte. Das Resultat der mathematischen Berechnung dieses Zustandes soll hier ohne Herleitung nochmals wiedergegeben werden, und zwar in geschlossener Form, weil die in der zitierten Arbeit angeführten abgebrochenen Serienentwicklungen nur beschränkte Gültigkeit haben.

Bei der Berechnung ist in naher Übereinstimmung mit den für die Metalle gegebenen und experimentell erreichbaren Verhältnissen vorausgesetzt worden: daß die Temperatur der Drahtenden konstant und gleich der Temperatur der dem Drahte gleichmäßig umgebenden Wände ist, daß bei der Erwärmung des Drahtes durch den Strom äußere Wärmeabgabe und Widerstand pro Längeneinheit des Drahtes proportional mit der Temperaturerhöhung anwächst, und daß die innere Wärmeleitfähigkeit als konstant angesehen werden kann. Es läßt sich dann der Zusammenhang zwischen Thomsons effekt und der von ihm hervorgebrachten Temperaturänderung am Drahte, die bei der Stromumkehrung doppelt erscheint, für einen beliebigen Punkt des Drahtes berechnen. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 63. S. 845. 1920.

T Temperatur der Umgebung und der Drahtenden,
 t von der Joulewärme hervorgebrachte Temperaturerhöhung,
 τ vom Thomsons effekt herrührende Temperaturänderung,
 s Stromstärke in Ampere,
 q Drahtquerschnitt in cm^2 ,

2 l Drahtlänge in cm,

y Abstand eines beliebigen Punktes von der Drahtmitte,

$$\eta = \frac{y}{l},$$

λ Wärmeleitfähigkeit in Watt/cm · Grad,

ϱ spezifischer Widerstand bei der Temperatur T in Ohm · cm,
 k Wärmeabgabe nach außen pro Längeneinheit des Drahtes
 und Grad Temperaturerhöhung in Watt,

$$z^2 = \frac{k l^2}{\lambda q} - \frac{d \varrho}{d T} \frac{s^2 l^2}{\lambda q^2},$$

σ Thomsonwärme in Volt/Grad.

Für die Thomsonwärme ergibt sich, wenn τ und t an demselben beliebigen Punkte des Drahtes gemessen werden,

$$(1) \quad \sigma = \frac{\lambda}{s} \cdot \frac{\tau}{t} \cdot \frac{3q}{y} \cdot \Phi.$$

Φ ist Funktion ausschließlich von z und η . Für $z = 0$ ist $\Phi = 1$. Für $z^2 < 0$ ($z = i|z|$) ist

$$(1') \quad \Phi = \frac{2}{3} \frac{\frac{\cos |\eta z|}{\cos |z|} - 1}{\frac{\cos |\eta z|}{\cos |z|} - \frac{\sin |\eta z|}{\eta \sin |z|}}$$

und für $z^2 > 0$ ist

$$(1'') \quad \Phi = \frac{2}{3} \frac{1 - \frac{\cosh \eta z}{\cosh x}}{\frac{\cosh \eta z}{\cosh x} - \frac{\sinh \eta z}{\eta \sinh x}} = \frac{2}{3} \frac{\frac{\cosam \eta z}{\cosam x} - 1}{\frac{\sinam \eta z}{\eta \sinam x} - 1}.$$

In (1) sind s , τ , t , q und η aus dem Experiment zu erhalten. Für λ liegen bei mehreren Metallen schon gute Bestimmungen vor. Etwas schwierig ist es dagegen, eine hinreichend genaue Schätzung von Φ zu erzielen, jedenfalls wenn die Wärmeabgabe (k) nach außen bedeutend ist. Φ kann vielleicht am einfachsten aus der gemessenen Temperaturerhöhung t berechnet werden, die in der Form geschrieben werden kann

$$(2) \quad t = \frac{\varrho s^2 l^2 (1 - \eta^2)}{2 \lambda q^2} \cdot \Psi.$$

Die hieraus berechnete Größe Ψ ist nämlich ebenso wie Φ eine Funktion ausschließlich von z und η , so daß Φ aus Ψ berechnet werden kann. Für $z = 0$ ist $\Psi = 1$, für $z^2 < 0$ ist

$$(2') \quad \Psi = 2 \frac{1 - \frac{\cos |\eta z|}{\cos |z|}}{z^2(1 - \eta^2)}$$

und für $z^2 > 0$ ist

$$(2'') \quad \Psi = 2 \frac{1 - \frac{\cosh \eta z}{\cosh z}}{z^2(1 - \eta^2)} = 2 \frac{1 - \frac{\cos \operatorname{am} z}{\cos \operatorname{am} \eta z}}{z^2(1 - \eta^2)}.$$

Die Bestimmung von Φ aus Ψ läßt sich am einfachsten graphisch ausführen. In Fig. 1 sind für $\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, für welchen

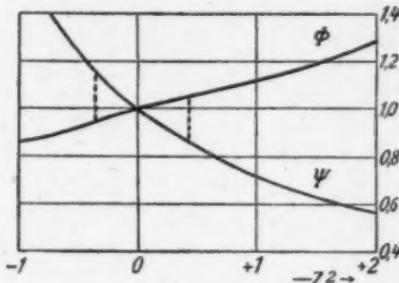


Fig. 1.

Wert τ ein Maximum ist. Φ und Ψ als Funktion von z aufgezeichnet. Man sieht daraus, daß wenn man z. B. einen Fehler in Φ von höchstens 5 Proz. zuläßt, es genügt, Ψ einfach gleich 1 zu setzen, sobald etwa $0.85 < \Psi < 1.15$ ist. Bei unseren Messungen liegt Ψ nur im Ausnahmefalle, bei den höchsten Temperaturen und den schlechtesten Leitern, wo unser Vakuum nicht ausreicht hat, um k genügend klein bei der Seite von λ zu halten, Ψ bei oder außerhalb dieser Grenzen. Nur in diesen Fällen haben wir Φ von 1 verschiedene, aus den Kurven der Fig. 1 erhaltene Werte gegeben.

§ 2. Meßanordnung.

Wie aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes hervorgeht, ist es vorteilhaft, die äußere Wärmeleitung ziemlich klein zu halten. Dies wird wohl am besten im Vakuum erreicht. Bei den erwähnten Messungen, die der eine von uns¹⁾ früher nach der vorliegenden Methode ausgeführt hat, war die An-

1) G. Borelius, a. a. O.

ordnung versucht, daß die zentralen Teile sich in einem evakuierten Glasgefäß befanden, das außen von dem Temperaturbade umgeben war. Trotz federnder Anlegung der inneren Teile an der Glaswand, war es aber bei dieser Anordnung nicht zu vermeiden, daß durch die bedeutende Joulewärme, die bei der Messung notwendig zugeführt werden muß, bei gutem Vakuum die Apparatemperatur hoch über die des Bades anstieg. Die Messungen mußten deshalb bei mäßigem Vakuum ausgeführt werden und die Korrektion wurde wegen der äußeren Wärmeleitung beträchtlich und etwas unsicher.

Dieser Übelstand ist jetzt durch die folgende Anordnung (Fig. 2) vermieden. Die Badflüssigkeit wird zentral durch ein langes dünnwandiges Messingrohr direkt in Berührung mit den Metallteilen gebracht, denen eine konstante Temperatur zu geben ist. Die inneren Teile sind dann, wie die Figur zeigt, von einem metallischen Vakuumgefäß umgeben, so daß das Vakuum zu der Konstanthaltung der Temperatur beiträgt. Das Messingrohr ist oben mit einer Mutteranordnung befestigt. Diese und die Durchführungen der Drähte werden mit Pizein gedichtet. Als Vakuumprüfer dient ein kleines Geißlerrohr.

Das Vakuum wurde durch eine rotierende Quecksilberpumpe mit einer Gerykpumpe als Vorpumpe hergestellt. Ein zwischen Pumpe und Apparat eingesetztes Kühlrohr wurde im allgemeinen bei 0° gehalten.

Um die zugeführte Joulewärme schnell zu verteilen und abzuleiten, sind die inneren Teile aus Kupfer und haben eine bedeutende Wärmekapazität. Doch genügen zwei Liter flüssige Luft sehr gut, um die Temperatur des Apparates herunterzu bringen und mehrere Stunden lang konstant zu halten.

Die Konstruktion der inneren Teile geht aus der Fig. 3 näher hervor. Das dünnwandige Messingrohr setzt in eine Ausbohrung eines Kupferzyinders von 5 cm äußeren Diameter fort. Am Zylinder ist unten mit vier Schrauben eine angeschliffene Kupferscheibe befestigt, an welcher der Meßdraht und die Zu leitungsanordnungen befestigt werden. Der Meßdraht wird nach oben und außen durch einen am Zylinder angelöteten Deckel thermisch geschützt.

Die Enden des zu messenden Drahtes werden zu zwei Kontaktanordnungen angemacht, die von der Kupferscheibe mit

Glimmer dünn isoliert sind. Um die Wirkung der an den Drahtenden entwickelten Peltierwärme ganz auszuschalten, wird der Draht noch an zwei an der Scheibe angelötete Kupferblöcke mit dünner Glimmerisolierung angeklemmt.

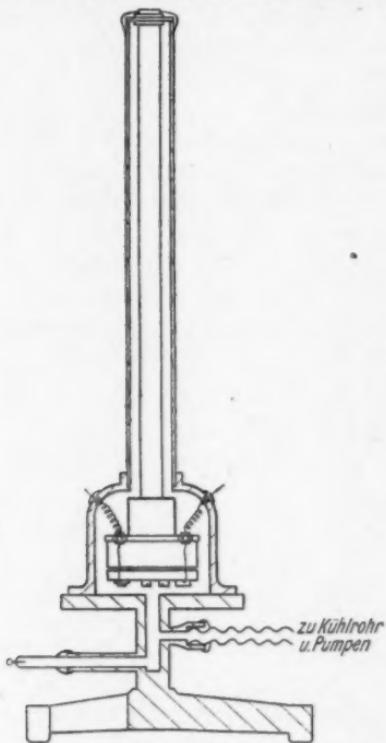


Fig. 2.

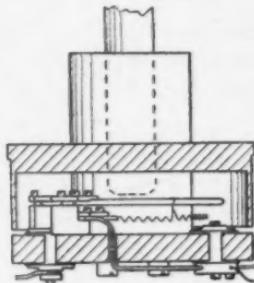


Fig. 3.

Das Thermoelement besteht aus 0,15 mm Kupfer- und 0,30 mm Konstantandrähten. Sie sind zueinander und zu einer um den Meßdraht gewundenen dünnen Kupferdrahtschleife gelötet. Die Schleife selbst wird am besten ohne Löten mit etwas Emaillelack befestigt. Die Enden des Thermoelementes sind zu zwei dickeren Kupferdrähten befestigt, die zu den Kupferblöcken mit dünner Glimmerisolierung angeklemmt sind und von dort aus durch Löcher in der Scheibe zu zwei Klemmschrauben an der Unterseite gehen.

Die Leitungen für Stromzuführung und zum Thermoelement kommen durch Löcher in die Vakuumglocke hinein und werden zuerst zwecks Steuerung und Wärmeausgleich an den Rand des Kupferdeckels isoliert angeklemmt, ehe sie an die Kontaktsschrauben unten anlangen. Parallel mit der einen kupfernen Zuleitung zum Thermoelement liegt ein Konstantdraht, der zusammen mit dem Kupferdraht ein Thermoelement für die Messung der Apparaturtemperatur bildet.

Wenn ein neuer Draht eingesetzt werden soll, ist das Vakuumgefäß vom Tisch abzunehmen, die Zuleitungen von den Kontaktsschrauben zu lösen und die Kupferscheibe nach Entfernung der vier Schrauben auszunehmen.

Fig. 4 zeigt das Schaltungsschema. Der Heizstrom wird von der Akkumulatorenbatterie über zwei nacheinander gekoppelten Stromwendern zugeführt. Diese Vorsichtsmaßregel

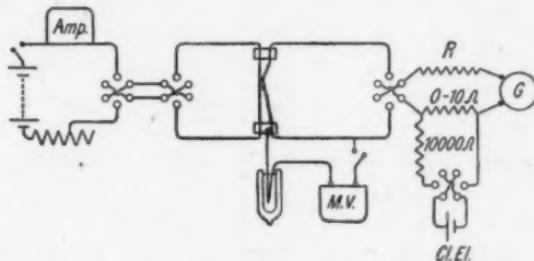


Fig. 4.

ermöglicht einen durch Widerstandsverschiedenheit in den beiden Stromrichtungen des einen Stromwenders hervorgerufenen Fehler, durch Mittelbildung über beiden Richtungen des anderen zu eliminieren.

Die Messungen der Temperaturänderungen am Drahte werden mit dem Drehspulengalvanometer G vorgenommen, dessen Empfindlichkeit bei dem benutzten Skalenabstand etwa 10^{-8} Ampere pro Skalenmm. betrug. Die Voltempfindlichkeit wird mit dem Widerstande R regulirt. Bei der Messung der ganzen Temperaturerhöhung t wird die Voltempfindlichkeit durch Einschaltung eines bedeutenden Widerstandes R von etwa 500 Ohm herabgesetzt. Bei der Messung der kleinen Thomsonwirkung τ

wird R ausgeschaltet und der größte Teil der von t herführenden Thermokraft mit dem nebengeschlossenen Clark-elemente kompensiert. Das Clarkelement dient auch zur Bestimmung der Voltempfindlichkeit unter den verschiedenen Bedingungen. Diese betrug im Maximum etwa $1,5 \cdot 10^{-7}$ Volt pro Skalenmm.

Die Temperatur des Apparates wird mit dem Kupfer-Konstantanelemente gemessen, dessen eine Lötstelle in Eis gehalten wird. Die thermoelektrische Kraft wird an einem Millivoltmeter abgelesen. Das Thermoelement war durch Vergleich mit einem an der Reichsanstalt kontrollierten Thermometer kalibriert worden (Fig. 4).

§ 3. Die Messungen.

Die Messungen wurden zwischen der Temperatur der flüssigen Luft und der des Wasserdampfes vorgenommen. Konstante oder nahe konstante Temperaturen wurden mit Hilfe flüssiger Luft, Kohlensäureschnee, Eis, Wasser von Zimmertemperatur und Wasserdampf erhalten. Die Kühlmittel wurden in das Messingrohr des Apparates eingeführt; der Wasserdampf wurde durch einen darin eingeschobenen Metallzylinder gesandt. Bei den zwischenliegenden Temperaturen wurden die Messungen unter langsamem Gang der Temperatur ausgeführt. Um die Temperatursteigerung bei tiefen Temperaturen zu verzögern, wurde die Wärmekapazität des Apparates durch einen im Rohre eingeführten Bleiblock vergrößert. Die Temperatur stieg von -180° bis -100° in etwa 3 Stunden und weiter von -100° bis 0° in etwa 7 Stunden.

Bei Messung mit konstanter Temperatur wurden jedesmal zwei Messungsserien ausgeführt, die eine mit dem ersten Stromwender in + Lage, die andere in - Lage. Jede Serie bestand aus 15 Ablesungen, d. h. 14 Kommutierungen an dem zweiten Stromwender. Sie gaben fast immer gute Übereinstimmung. Jeder Mittelwert ist somit über 26 Einzelwerte gebildet. Bei Messung unter Gang konnte nicht immer die Serie so groß werden, weil der Galvanometer schon nach einer kürzeren Serie über die ganze Skala hinauslief, so daß ein neuer Kompensationswiderstand eingesetzt werden mußte, und eine neue Serie anfangen. Der erste Stromwender lag bei

diesen Serien abwechselnd in + und - Lage, und die später angegebenen Resultate sind Mittelwerte aus je zwei nacheinander folgenden Serien.

Die Zeit zwischen zwei Ablesungen und Kommutierungen war bei den besten Leitern Cu, Ag, Au und Al 2 Minuten, bei den übrigen 3 Minuten. Wir überzeugten uns durch Serien mit längeren Zeiten, daß der Ausschlag dabei nicht wesentlich anstieg.

Trotzdem der Gang zwischen zwei Ablesungen besonders bei tiefen Temperaturen oft mehrere Skalenzentimeter betrug, war es im allgemeinen so regelmäßig, daß die Einzelwerte des Stromumkehrungseffektes (aus drei Ablesungen berechnet) bis auf einige Zehntelmillimeter übereinstimmten. Serien, wo der Gang wegen Schwankungen in der Stromstärke, im Vakuum, in der Zimmertemperatur usw. etwas unregelmäßig war, wurden am besten graphisch ausgewertet.

Die freie Länge der Meßdrähte in dem Apparate betrug etwa 17 cm. Die Dicke der Drähte wurde so gewählt, daß mit der maximalen Stromstärke 10 Ampere eine Temperaturerhöhung der Drahtmitte von 30 bis 50° bei mittleren Temperaturen erreicht wurde. Wegen der Abnahme des Widerstandes mit der Temperatur wurde die Temperaturerhöhung des Drahtes bei den tiefen Temperaturen kleiner und dadurch die Empfindlichkeit bei der Messung des Thomsoneffektes entsprechend herabgesetzt.

§ 4. Fehlerquellen.

Der eine von uns hat schon gezeigt, daß die Peltierwärme eine äußerst gefährliche und früher sicher unterschätzte Fehlerquelle bei den Messungen des Thomsoneffektes ausmacht. Wir sind deshalb auf diesen Punkt besonders aufmerksam gewesen. Störende Peltierwirkungen können teils an den Drahtenden auftreten, teils im Innern des Drahtes, sobald dessen Teile durch mechanische oder thermische Behandlung etwas verschieden sind. Die Peltierwirkungen an den Drahtenden sind wohl hier durch die Art der Befestigung der Drähte ausgeschaltet worden. Die Gefahr für Strukturverschiedenheiten zu folge ungleicher Erwärmung der Drahtteile ist bei der vor-

liegenden Methode viel kleiner als bei der früher meist benutzten Stabmethode, weil das Temperaturgefälle hier nur einige Zehner Grad ist, während es früher oft mehrere hundert Grad betrug. Der wichtigste Vorteil unserer Methode ist aber, daß durch die Proportionalität der gemessenen Thomsonwirkung mit der dritten Potenz der Stromstärke diese Wirkung von der mit der Stromstärke proportionalen Peltierwirkung getrennt werden kann.

Um die Peltierwirkungen nachzuspüren, haben wir oft nach der eigentlichen Messung mit einer Stromstärke von 7 bis 10 Ampere noch eine Kontrollmessung mit etwa halb so großer Stromstärke vorgenommen. Die Resultate dieser Prüfungen sind in der Tab. 1 zu sehen. Die Tabelle enthält zuerst die bei der kleineren Stromstärke direkt observierten Ausschläge in Millimetern, dann die entsprechenden Werte, wie sie sich aus den etwa achtmal größeren Ausschlägen bei den größeren Stromstärken gemäß der Proportionalität mit der dritten Potenz derselben berechnen lassen. Bei dieser Berechnung ist auch auf die in beiden Fällen verschiedenen Widerstandserhöhungen und Galvanometerempfindlichkeiten Rücksicht genommen worden. Die dritte Kolumne enthält die Differenzen der observierten und berechneten Werte. Angenommen, daß diese Differenzen von Peltierwärme herrühren, können wir wegen der Proportionalität der Peltierwirkung mit der Stromstärke deren Einfluß auf dem gemessenen Thomsoneffekte leicht berechnen. Der prozentuale Einfluß ist in der letzten Kolumne eingetragen. Insofern diese Zahlen durch zufällige Fehler entstanden sind, erscheinen sie hier etwa doppelt so groß. Bei Cu 2, Ag 2, Au, Zn 2 und Pb 2 liegen die Differenzen innerhalb der Grenzen der zufälligen Fehler oder nahe dabei. Bei Cu 1 und Ag 1 sind die Abweichungen dagegen beträchtlich. Sie sind dadurch entstanden, daß wir versucht hatten das Thermoelement an dem Drahte anzulöten. Die Prüfung lehrt aber, daß die Erwärmung beim Löten genügt hat, um den thermoelektrischen Zustand des Drahtes beträchtlich zu verändern. Man sieht, wie äußerst gefährlich kleine Strukturverschiedenheiten bei der Messung des Thomsoneffektes wirken können. Die übrigen Meßresultate für Cu 1 und Ag 1 wurden nach dieser Prüfung verworfen und neue Messungen an Cu 2 und Ag 2 vor-

genommen. In der Tat erhielten wir dabei Werte, die von den früheren in der berechneten Weise abweichen.

Tabelle 1.

Probe	Δ obs.	Δ ber.	Diff. Δ	Fehler in σ %
Cu 1 bei 0°	1,58	1,10	0,48	10
Cu 2 " 20°	2,47	2,51	0,04	1
Ag 1 " 100°	1,61	0,76	0,85	25
Ag 2 " 20°	1,11	1,15	0,04	1
Au " 20°	1,49	1,83	0,16	3
Zn " 20°	2,24	2,01	0,23	3
Pb " 0°	0,49	0,52	0,03	2

Bei Zn, Cd, Sn und Pb, die besonders große Ausdehnungskoeffizienten haben, trat bei der Abkühlung des Apparates eine störende Erscheinung hervor. Die Drähte zogen sich schneller zusammen als die Schrauben, die sie an den Kupferblöcken anklemmten. Der Druck wurde dadurch kleiner und die Wärmeleitung durch das Glimmer hindurch viel schlechter. Dies wirkt nun, als ob der Draht mit sinkender Temperatur verlängert wird, so daß die von einem konstanten Strome hervorgebrachte Temperaturerhöhung nicht wie sonst proportional dem Verhältnis von spezifischem Widerstand und Wärmeleitfähigkeit abnimmt, sondern langsamer. Wenn aber diese Einwirkung mit einer gleichmäßigen Verlängerung des Drahtes äquivalent ist, hat sie glücklicherweise keinen wesentlichen Einfluß auf den nach (1) berechneten Thomsons-Effekt. In diesem Ausdruck geht nämlich, abgesehen von der Größe Φ , die im allgemeinen zu 1 zu setzen ist, nur der Abstand des Thermoelementes von der Mitte des Drahtes ein, und dieser wird ja unter den gemachten Voraussetzungen nicht geändert. Diese Auffassung scheint nun auch durch Messungen bei Zimmertemperatur vor und nach einer Erwärmung auf 100° gestützt zu werden. Allerdings bringt diese Erscheinung für die Messungen an den genannten Metallen bei tiefen Temperaturen eine gewisse Unsicherheit mit. Wir haben sie dadurch zu beseitigen versucht, daß wir unter den Schrauben kräftige Uhrfederstücke eingesetzt haben, aber ohne Erfolg.

Eine weitere Fehlerquelle steckt natürlich darin, daß die Voraussetzungen, die der mathematischen Ableitung des Ausdrückes (1) zugrunde gelegt worden sind, nicht immer ganz zutreffen. Jedenfalls können die zumal bedeutenden Abweichungen von den Resultaten früherer Forscher, die wir gefunden haben, nicht in dieser Weise erklärt werden, und wir haben eine Stütze unserer Werte darin gefunden, daß eine verbesserte Übereinstimmung mit der von der Thomsonschen Theorie geforderten Beziehung zwischen Thomsonwärme und Thermokraft erhalten worden ist. Zu einer genauen Prüfung dieser Übereinstimmung wären zwar Thermokraftmessungen an denselben Drähten nötig, und solche sind nicht ausgeführt worden. Eine ungefähre Prüfung ist aber vorgenommen mit Hilfe der Thermokraftmessungen von Wietzel¹⁾, die an ziemlich gleichwertigem Material ausgeführt worden sind. Nur bei Zink haben wir wesentliche Abweichungen gefunden. Dies kann aber nicht verwundern, da wir den Thomsonseneffekt des Zinks außerordentlich stark von der Vorbehandlung der Drähte abhängig gefunden haben.

Eine weitere Unsicherheit entsteht dadurch, daß die Wärmeleitfähigkeitswerte, die wir für die Berechnung des Thomsonseneffektes brauchen und die wir den Arbeiten anderer Forscher entnommen haben, nicht immer an ganz vergleichbarem Material bestimmt worden sind.

§ 5. *Meßresultate.*

Wir geben im folgenden die Resultate unserer Messungen mit der Hilfe von Tabellen und Figuren wieder. Wir haben die zu einer Gruppe des periodischen Systems gehörigen Metalle in einer Figur zusammengestellt um die ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten in bezug auf das periodische System, die hier vorhanden sind, sogleich hervorzuheben.

Kupfer.

Wie schon erwähnt, hat der eine von uns schon früher den Thomsonseneffekt von Kupfer an einem Leitungsdrähte guter Reinheit untersucht. Bei dieser Messung war aber die experimentelle Anordnung weniger befriedigend als jetzt, und be-

1) G. Wietzel, Diss. Berlin 1913.

sonders war der etwas unsicherer Korrektion wegen äußere Wärmeleitung und Widerstandserhöhung größer. Es war deshalb von Interesse, dieselbe Kupfersorte nochmals zu messen, und dies ist jetzt bei Zimmertemperatur gemacht worden. Der Draht, von Max Sieverts Kabelwerken in Stockholm bezogen, ist durch den spezifischen Widerstand $1,695 \cdot 10^{-6}$ bei 18° charakterisiert. Die Wärmeleitfähigkeit ist aus Messungen von Meißner¹⁾ an zwei Kupfersorten mit Hilfe der Widerstands-werte interpoliert worden. Der jetzt bei Cu 2 erhaltene Wert des Thomsons-Effektes $\sigma = 1,78 \cdot 10^{-6}$ bei 318° stimmt mit dem aus den früheren Messungen interpolierten etwa $1,74 \cdot 10^{-6}$ innerhalb den Versuchsfehlern gut überein und wir haben es deshalb nicht nötig gefunden, die Messungen bei höheren und tieferen Temperaturen zu wiederholen. In Fig. 5 werden die früheren Resultate nochmals wiedergegeben.

Tabelle 2.

Cu 2.

$$2l = 17,60 \quad x = 3,98 \quad q = 0,497$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	σ
+ 25	312	3,89	+ 1,78

($2l$ ist die freie Länge des Drahtes in cm., x Abstand des Thermoelementes vom nächsten Ende, q Querschnitt hier in mm^2 , T Apparaturtemperatur in Celsiusgrade, $T + \bar{t}$ mittlere absolute Temperatur des Drahtes, λ Wärmeleitfähigkeit in Watt/cm.-Grad und σ Thomsons-Effekt in $\text{Volt} \cdot 10^{-6}$ pro Grad.)

Silber.

Das Ausgangsmaterial war 1 mm-Draht, von Kahlbaum in Berlin bezogen. Aus Angaben in der Literatur über die gewöhnliche Reinheit des käuflichen reinen Silbers wird es wahrscheinlich, daß dieses Silber in die dritte Reinigungsstufe kommt. Die Werte der Wärmeleitfähigkeit haben wir einer Untersuchung von Lees²⁾ entnommen.

1) W. Meißner, Ann. d. Phys. 47. S. 1001. 1915.

2) C. Lees, Phil. Trans. 208. S. 381. 1908.

Ag 1: Ein Stück des halbharten Drahtes wurde auf etwa 400° erhitzt und zwischen -180° und $+100^{\circ}$ untersucht. Bei der erst nachträglich vorgenommenen Prüfung auf einen Einfluß von Peltierwirkungen zeigte sich aber, wie schon in § 4 gezeigt worden ist, daß wegen einer Unvorsichtigkeit dieser Einfluß beträchtlich geworden war. Wir geben deshalb die Resultate nicht an. Im großen stimmen sie mit den Messungen an Ag₂ überein.

Ag 2: Ein Stück des Drahtes wurde auf einem geeigneten Diameter von 0,73 mm ausgezogen, und der gezogene Draht wurde in einem elektrischen Ofen sehr gleichmäßig auf 400° erhitzt und wieder langsam abgekühlt. Nach einer Untersuchung von Borelius¹⁾ wird nämlich bei 400° der thermoelektrische Einfluß von der Bearbeitung vollständig aufgehoben, während der oberflächlichen Einwirkung von der Atmosphäre noch recht klein ist. Die Resultate sind in Tab. 3 und Fig. 5 enthalten. Wegen zufälliger Störungen liegt die Genauigkeit bei diesen Messungen etwas unterhalb unserer durchschnittlichen Genauigkeit.

Tabelle 3.

Ag 2.

$$2l = 17,81 \quad x = 8,73 \quad q = 0,428$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	σ
- 178	107	4,14	- 0,07
158	130	4,17	+ 0,44
127	164	4,19	0,63
48	248	4,16	1,02
+ 16	309	4,07	1,42
96	388	3,95	1,70

Gold.

Ein 1 mm-Draht von Kahlbaum wurde auf die günstigste Temperatur von etwa 400° erhitzt und davon langsam abgekühlt. Nach Mylius²⁾ ist dieses Gold vermutlich zur dritten Reinigungsstufe zu rechnen. Die Wärmeleitfähigkeit des Goldes ist von Meißner gemessen worden.

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 60, S. 381. 1919.

2) F. Mylius, Zeitschr. f. anorg. Chem. 74, S. 407. 1912.

Tabelle 4.

Au.

$$2l = 17,44 \quad x = 8,54 \quad q = 0,789$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	σ
- 180	102	8,28	+ 0,82
172	110	8,20	0,48
152	131	8,15	0,78
119	166	8,11	1,01
86	200	8,11	1,18
48	239	8,11	1,33
+ 17	310	8,11	1,68
86	376	8,11	1,92

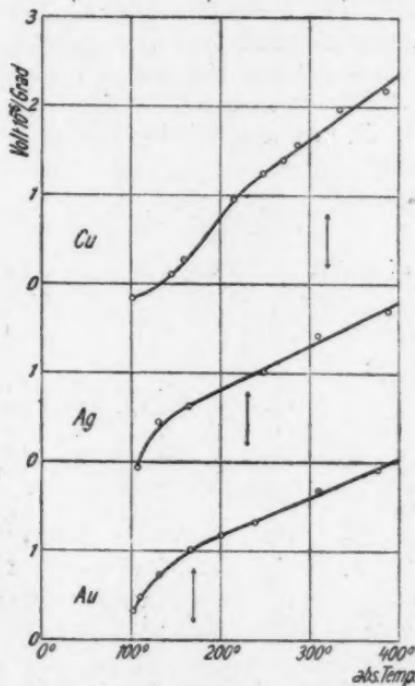


Fig. 5.

Wir wollen darauf hinweisen, daß die Kurven der Fig. 5 für Cu, Ag und Au, welche eine Gruppe des periodischen Systems ausmachen, von ganz demselben Typus sind. Die

scheinbare Verschiedenheit ist nur durch die verschiedenen charakteristischen Temperaturen bedingt. Letztere sind aus den Temperaturkurven der spezifischen Wärme berechnet, in der Figur durch Pfeile angegeben.

Zink.

Zn 1: Das Material war von der Firma Merck in Darmstadt bezogen und als chemisch rein (höchste Qualität der Firma) bezeichnet. Das granulierte Material wurde in einem Glasrohr gegossen, gewalzt und gezogen. Der Draht wurde erst bei Zimmertemperatur gemessen und dann in dem Apparate auf 100° erwärmt und weiter gemessen in der zeitlichen Reihenfolge, die aus der Tab. 5 zu sehen ist und die in der Fig. 6 durch Pfeile angegeben wird. Die erste Erwärmung des hartgezogenen Drahtes auf 100° hat einen überraschend großen Einfluß auf die Thomsonwärme. Auch die Abkühlung auf -180° scheint die thermoelektrischen Eigenschaften des Zinks zu ändern.

Tabelle 5.

Zn 1.

$$2l = 16,93 \quad x = 3,49 \quad q = 1,908$$

T Cels.	$T + l$ abs.	λ	σ
+ 30	315	1,12	6,16
93	384	1,115	5,88
21	311	1,12	8,52
- 75	211	1,125	1,68
+ 18	308	1,12	8,87
- 181	105	1,19	0,87
150	128	1,155	1,08
109	180	1,18	1,19
74	216	1,125	1,84
42	248	1,125	1,58
4	287	1,125	2,28
+ 62	358	1,12	4,65
95	380	1,115	5,95

Zn 2: Die an Zn 1 erhaltenen Resultate veranlaßten uns, auch ein hartgezogenes Zink bei tiefen Temperaturen zu untersuchen. Wir gingen diesmal von einem Stab aus Zink „Kahlbaum“ aus. Er wurde gewalzt und gezogen und bald danach von -180° aus bei steigenden Temperaturen untersucht (Tab. 6

und Fig. 6). Zwischen den Messungen bei 18° und bei 23° war eine Zwischenzeit von zwei Tagen und das Zink scheint sich während dem verändert zu haben.

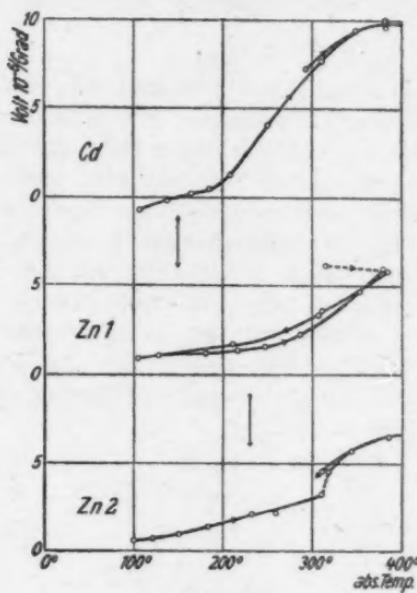


Fig. 6.

Tabelle 6.

Zn 2.

$$2l = 17,40 \quad z = 8,57 \quad q = 1,712$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	σ
- 188	100	1,195	+ 0,59
- 163	121	1,165	0,70
- 145	150	1,145	0,94
108	188	1,18	1,81
54	232	1,18	2,06
28	259	1,125	2,19
+ 13	311	1,125	3,22
23	318	1,12	4,51
52	344	1,12	5,76
95	386	1,115	6,58
21	311	1,125	4,58

Beide Zinkproben dürften sehr rein gewesen sein. Für Zink „Kahlbaum“ liegt eine Analyse von Mylius¹⁾ vor, nach welcher es zur vierten Reinigungsstufe zu rechnen ist. Die Wärmeleitfähigkeit des Zinks ist von Lees gemessen worden.

Cadmium.

Ausgangsmaterial war ein Stab Cadmium „Kahlbaum“, der gewalzt und gezogen wurde. Das Material gehört nach Mylius in die vierte Reinigungsstufe. Die Tab. 7 (wo die Wärmeleitfähigkeitswerte den Messungen von Lees entnommen sind) lehrt, daß die erste Erwärmung auf 100° hier eine verhältnismäßig kleinere Einwirkung hat als bei Zink.

Zink und Cadmium, unsere Repräsentanten der zweiten Gruppe des periodischen Systems, zeigen beide oberhalb der charakteristischen Temperaturen einen kräftigen Gang des Thomsoneffektes nach dem Positiven. Die vermuteten Eigentümlichkeiten der Kurven unterhalb derselben können erst durch Messungen bei noch tieferen Temperaturen festgestellt werden.

Tabelle 7.

Od.

$2 l = 17,11$

$x = 3,70$

$q = 2,97$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	Φ	σ
+ 5	294	0,910		+ 7,2
94	383	0,873	1,025	9,6
- 176	107	1,014		- 0,72
146	138	0,987		0,15
117	165	0,969		+ 0,20
99	185	0,960		0,48
75	209	0,948		1,29
35	251	0,929		4,08
+ 25	311	0,901	1,02	7,65
62	349	0,887	1,08	9,4
94	382	0,873	1,04	9,9

Zinn.

Zinn „Kahlbaum“ (vierte Reinigungsstufe) wurde gegossen und zu Viereckdraht gewalzt. Bei den Messungen wurde das

1) F. Mylius, a. a. O.

tiefe Temperaturgebiet zweimal durchgegangen. Resultate in Tab. 8 und Fig. 7. Wärmeleitfähigkeitswerte nach Lees.

Tabelle 8.

Sn.

 $2 l = 16,58$ $x = 3,42$ $q = 2,96$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	Φ	σ
+ 22	318	0,645	1,02	- 0,16
93	385	0,610	1,04	0,34
23	319	0,645		0,12
- 183	102	0,838		+ 0,86
169	117	0,815		0,91
162	180	804		0,85
143	146	782		0,66
130	160	767		0,72
99	194	735		0,47
62	238	715		0,19
+ 4	299	662		- 0,07
56	348	636	1,02	0,31

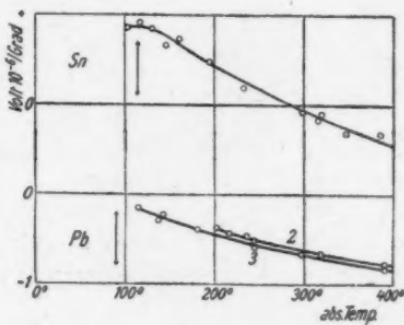


Fig. 7.

Blei.

Beim Blei haben wir drei verschiedene Proben untersucht, teils weil das Blei als häufig benutztes thermoelektrisches Normalmetall uns besonders interessierte, teils weil wir die bedeutende Abweichung unserer Resultate von denen anderer Forscher sicher werden wollten. Die Wärmeleitfähigkeit von Blei ist von Meißner gemessen worden.

Pb 1: Ein 1,8 mm Bleidraht von Kahlbaum wurde zu einer Zeit gemessen, wo der Apparat noch nicht ganz aus-

experimentiert war und ein Thomsoneffekt von etwa 0,8 Mikrovolt gefunden. Dieses Resultat hat uns sehr verwundert, da der Thomsoneffekt des Bleis nach Messungen von Battelli und von Cermak bei Zimmertemperatur allgemein als sehr klein positiv angenommen worden ist. Der bedeutende negative Wert hat sich aber bei genauen Messungen an anderen Bleiproben durchaus bestätigt.

Pb 2: Reines Blei von Merck wurde gegossen, gewalzt und gezogen. Die Messungen gehen von -100° bis $+100^\circ$ und werden in Tab. 9 und Fig. 7 wiedergegeben.

Tabelle 9.

Pb 2.

$$2l = 16,57 \quad x = 8,68 \quad q = 4,74$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	Φ	σ
- 99	201	0,860		- 0,88
84	216	0,858		0,44
62	237	0,856		0,48
55	244	0,855		0,52
+ 4	297	0,850	1,05	0,87
95	390	0,850	1,09	0,79

Pb 3: Wir gingen vom Blei „Kahlbaum“ aus, daß eines der reinsten käuflichen Metalle sein dürfte. Mylius fand in einer Probe nur 0,002 Proz. Gesamtverunreinigungen. Das Blei wurde gegossen, gewalzt und gezogen und vor der Messung auf 100° erwärmt. Die Resultate finden sich in Tab. 10 und Fig. 7.

Tabelle 10.

Pb 3.

$$2l = 16,98 \quad x = 8,51 \quad q = 4,97$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	λ	Φ	σ
- 180	115	0,881		- 0,16
156	138	0,872		0,28
152	142	0,871		0,25
116	181	0,861		0,40
51	245	0,852		0,58
+ 28	319	0,850	1,04	0,87
97	390	0,850	1,17	0,84

Die Übereinstimmung zwischen Pb 2 und Pb 8 ist gut. Die Abweichungen von den Werten von Cermak¹⁾, der eine von $\sigma = 0$ bei 0° bis $\sigma + 1$ Mikrovolt bei 300° ansteigender Kurve fand, können entweder auf chemische noch auf mechanische Verschiedenheit der Proben zurückgeführt werden. Cermak untersuchte nämlich auch Blei „Kahlbaum“, und Blei wird durch mechanische Bearbeitung thermoelektrisch sehr wenig beeinflußt. Wir haben keine andere wahrscheinliche Erklärung für diese Unübereinstimmigkeit finden können, als daß bei Cermak die Peltierwärme bei den durch einen Kupferdraht verbundenen Stabenden einen bedeutenden Fehler herbeigeführt hat, der bei der von Cermak benutzten Methode schwer zu kontrollieren ist.

Da die charakteristischen Temperaturen von Sn und Pb sehr niedrig sind, geben unsere Messungen nur die für relativ hohe Temperaturen gültigen Gesetzmäßigkeiten an. Beide Metalle zeigen mit steigender Temperatur einen ähnlichen Gang nach dem Negativen hin.

Aluminium.

An einem 1 mm-Aluminiumdraht von Kahlbaum wurden die Werte der Tab. 11 gefunden. Da aber die Verunreinigungen wahrscheinlich von der Größenordnung 1 Proz. sind, ist das Resultat nur von beschränktem Interesse.

Tabelle 11.

Al.

$$2l = 17,17 \quad x = 8,45 \quad q = 0,784$$

T Cels.	$T + \bar{t}$ abs.	\bar{t}	σ
- 34	260	2,09	+ 0,11
+ 4	297	2,10	- 0,07
57	352	2,12	0,32
95	392	2,14	0,54

Zusammenfassung.

Wir haben aus dem thermischen Gleichgewicht an einem stromdurchflossenen Drahte mit wesentlich neuen experimentellen Anordnungen die Thomsons-Effekte von Cu, Ag, Au, Zn,

1) P. Cermak, Ann. d. Phys. 33. S. 1195. 1910.

Cd, Sn, Pb und Al im Temperaturgebiete zwischen 100° und 400° absolut gemessen und dabei die folgenden graphisch ausgeglichenen Werte in Mikrovolt/Grad bekommen:

Tabelle 12.

Cu	Ag	Au	Zn
100 - 0,16	105 - 0,10	100 + 0,29	100 + 0,8
120 0,08	120 + 0,25	180 0,71	150 1,1
140 + 0,06	150 0,55	160 0,96	200 1,25
170 0,31	200 0,81	200 1,18	250 1,55
200 0,76	300 1,31	300 1,61	300 2,6
280 1,10	400 1,80	400 2,05	380 5,9
300 1,63			
400 2,36			

Od	Sn	Pb	Al
110 - 0,65	100 + 0,86	120 - 0,19	260 + 0,11
150 0,0	180 0,85	150 0,80	300 - 0,08
190 + 0,55	200 0,42	200 0,45	400 0,56
230 2,7	300 - 0,07	300 0,68	
300 7,1	400 0,45	400 0,85	
350 9,8			
380 9,8			

Lund, Physik. Institut der Universität, Mai 1921.

(Eingegangen 21. Mai 1921.)

4. *Feld und Materie;*
von H. Weyl.

I.

Wenn ich in dieser Arbeit sowie in einer mit ihr nahe zusammenhängenden, in der „Physikalischen Zeitschrift“ erscheinenden Note über die „erweiterte“ Relativitätstheorie einige Punkte zur Sprache bringe, die für die physikalische Auffassung der Relativitätstheorie von grundsätzlicher Bedeutung sind, so referiere ich damit zugleich über die wichtigsten Änderungen in physikalischer Hinsicht, welche mein Buch „Raum, Zeit, Materie“¹⁾ in der vierten Auflage (Springer 1921) erfahren hat.

Das Galileische Trägheitsgesetz zeigt, daß in der Welt eine Art zwangswise Führing vorhanden ist, welche einem Körper, der in bestimmter Weltrichtung losgelassen ist, eine ganz bestimmte natürliche Bewegung aufnötigt, aus der er nur durch äußere Kräfte herausgeworfen werden kann; und zwar geschieht das vermöge einer von Stelle zu Stelle infinitesimal wirksamen Beharrungstendenz, welche die Weltrichtung r des Körpers im beliebigen Punkte P „parallel mit sich“ nach demjenigen zu P unendlich benachbarten Punkten P' transportiert, welcher in der Richtung r von P aus liegt. Das ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an die Stelle beider setzte. Über die im Trägheitsgesetz ausgesprochene Tatsache hinausgehend, nehmen wir an, daß das „Führungsfeld“ nicht bloß die infinitesimale Parallelverschiebung von Richtungen in sich selber, sondern auch der *Vektoren* im Punkte P nach allen zu P unendlich benachbarten Punkten bestimmt. Dann ist das Führungsfeld das Gleiche, was ich sonst mit einem mathematischen Terminus als affinen Zusammenhang

1) Es wird im folgenden als „RZM“ zitiert.

der Welt bezeichnet habe. Das Wesen der Parallelverschiebung, der „ungeänderten“ Verpflanzung, kommt darin zum Ausdruck, daß in einem gewissen zu P gehörigen, dem „geodätischen“ Koordinatensystem die Komponenten eines beliebigen Vektors in P bei Parallelverschiebung nach einem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte keine Änderung erfahren (Einsteins Forderung, daß sich das Gravitationsfeld lokal „wegtransformieren“ läßt). In einem willkürlichen, aber ein für allemal fest gewählten Koordinatensystem lautet demgemäß¹⁾ die Formel für die Parallelverschiebung vom Punkte $P = (x_i^0)$ nach dem Punkte $P' = (x_i^0 + dx_i)$, durch welche ein willkürlicher Vektor ξ in P mit den Komponenten ξ^i in den Vektor $(\xi^i + d\xi^i)$ in P' übergeht, folgendermaßen:

$$d\xi^i = - \Gamma_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha dx_\beta,$$

wobei die nur von der Stelle P abhängigen Größen $\Gamma_{\alpha\beta}^i$, die Komponenten des Führungsfeldes, der Symmetriebedingung

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \Gamma_{\beta\alpha}^i$$

genügen. Im geodätischen Koordinatensystem verschwinden sie sämtlich. Die Weltlinie eines sich selbst überlassenen Massenpunktes genügt, bei geeigneter Wahl des die verschiedenen Stadien der Bewegung voneinander unterscheidenden Parameters s („Eigenzeit“), der Gleichung

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Mir scheint es für die richtige Erfassung und anschauliche Darlegung der Grundgedanken der Einsteinschen Gravitationstheorie zweckmäßig, zunächst keine Rücksicht darauf zu nehmen, daß das Führungsfeld in einer tieferen Beschaffenheit der Welt, ihrer Metrik, fundiert ist. Wie angemessen und berechtigt es auch in rein theoretischer Hinsicht ist, den affinen Standpunkt neben dem metrischen selbstständig zur Geltung zu bringen, geht, denke ich, aus dem Aufbau der Infinitesimalgeometrie im II. Kapitel von RZM hervor. Die alte Galileische und die neue Einsteinsche Auffassung unterscheiden sich dadurch, daß nach Galilei das Führung-

1) RZM, S. 101.

feld eine der Welt an sich zukommende geometrische Struktur ist, unabhängig von der erfüllenden Materie und ihrer Konstellation, während es nach Einstein ein Zustandsfeld von physikalischer Realität ist (analog dem elektromagnetischen Feld), das mit der Materie in Wechselwirkung steht. Nach Galilei bestimmt ein Vektor in einem Punkte P einen ihm „gleichen“ in einem beliebigen andern Punkte P' an sich (d. h. unabhängig von der Materie) und *unmittelbar in die Ferne*; mit besonderer Klarheit spricht das Maxwell in *Matter and Motion* aus¹): „Bei allen bisher über die Bewegung von Körpern Gesagten haben wir stillschweigend angenommen, daß es beim Vergleiche zweier Konfigurationen des Systems miteinander möglich ist, in der Endkonfiguration eine Linie *parallel* mit einer in der Anfangskonfiguration liegenden Linie zu ziehen.“ Nach Einstein geschieht diese Übertragung längs einer P mit P' verbindenden Weltlinie vermöge einer nur im Unendlich kleinen wirksamen Beharrungstendenz, die außerdem sich verändert mit der Konstellation der Materie. Der physikalische Erfolg der Einsteinschen Auffassung lag darin, daß in seiner Theorie das Führungsfeld die Erscheinungen der *Gravitation* mit umfaßt: die Planeten folgen der ihnen durch das Führungsfeld vorgeschriebenen natürlichen Bahn; es ist keine besondere „Gravitationskraft“ nötig wie bei Newton, die sie aus dieser Bewegung ablenkte. Eine Trennung des Führungsfeldes in zwei Bestandteile, „Trägheit“ und „Gravitation“, kann nur mit einer gewissen Willkür vorgenommen werden, sie ist ohne objektive Bedeutung.²

1) Ich zitiere nach der deutschen Übersetzung von Fleischl, (Braunschweig 1881) S. 95.

2) Wenn Lenard in seinem Kampf gegen die allgemeine Relativitätstheorie beständig von „eingierten“ Gravitationsfeldern spricht, so scheint mir das zu zeigen, daß er diese Einheit von Trägheit und Gravitation noch nicht erfaßt hat. Genau so könnte ein Anhänger der Alten, der mit ihnen an eine absolut ausgesiechne Richtung oben-unten im Raum glaubt, gegen die moderne Ansicht von der Gleichberechtigung aller Richtungen im Raum argumentieren; indem er die wirkliche Fallrichtung eines Körpers nicht als Einheit akzeptiert, sondern sie sich aus jener absoluten Normalrichtung und einer Abweichung davon zusammengesetzt denkt. Natürlich sucht ein solcher (mit Demokrit) nur nach einer materiellen Ursache für die „Abweichung“, während wir mit

Wir haben also nicht zu fragen, wie die „(wirklichen oder fingierten) Gravitationsfelder“, sondern nach welchem Gesetz das *Führungsfeld* durch die Materie erzeugt wird oder mit ihr in Wechselwirkung steht. Darüber sind zwei verschiedene Ansichten möglich.

1. Wenn ich nicht irre, wird heute durchweg von den theoretischen Physikern das *Feld* als eine selbständige Realität neben der Materie anerkannt oder sogar als die einzige ursprüngliche physikalische Wesenheit betrachtet, auf welche die Materie zurückgeführt werden muß. Diese Auffassung ist bekanntlich am konsequentesten von G. Mie zur Geltung gebracht worden.¹⁾ Nur in ihrem Rahmen ist die Behauptung berechtigt, daß die Masse eines Körpers aus konzentrierter Feldenergie bestehe. Von diesem Standpunkt aus hat man auf die Frage nach der Ursache des verschiedenen Verhaltens eines „ruhenden“ und eines „rotierenden oder beschleunigten“ Körpers K zu antworten, daß das vollständige physikalische System, bestehend aus dem Körper und dem *Führungsfeld*, in dem einen Falle ein anderes ist wie im andern. Das *Führungs-feld* ist die reale Ursache der Trägheitskräfte; es ist ein unberechtigtes Überbleibsel des alten Alleinrechts der *Körper* auf physikalische Wirklichkeit, wenn man (mit Mach und Einstein) den Unterschied der beiden Fälle durchaus in einem verschiedenen kinematischen Verhältnis von K zu andern *Körpern* suchen will. Woher z. B. das an der Erdoberfläche herrschende *Führungsfeld* stammt, das an der Zerstörung eines plötzlich gebremsten Eisenbahnzuges mitschuldig ist, ist nicht eine Frage der Naturgesetze, sondern des zufälligen augenblicklichen Weltzustandes (nicht anders wie etwa die Zahl und Masse der Planeten). In der Tat zeigen denn auch die Feldgesetze an, daß Zustand der Materie (Energie – Impuls – Tensor) und des Feldes in einem Augenblick willkürlich vorgegeben werden können; sie bestimmen lediglich, wie sich

Newton in der Anziehung der Erde die materielle Ursache für die Fallrichtung als Einheit erblicken. So muß denn auch Einstein nicht bloß die Gravitation genannte leichte Fluktuation des *Führungs-feldes* in der Materie verankern, sondern das *Führungsfeld* als Ganzes.

1) Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. 37. S. 511 bis 534. 1912; 39. S. 1–40. 1912; 40. S. 1–65. 1913.

daraus die Folgezustände (und die vergangenen) des ganzen Systems gesetzmäßig entwickeln. Nicht anders steht es mit den Gesetzen des elektromagnetischen Feldes.¹⁾

2. Es ist aber nicht zu leugnen, daß die Erfahrung mit großer Deutlichkeit für einen andern Sachverhalt spricht; dafür nämlich, daß die Materie das Feld eindeutig bestimmt. Die reine Feldphysik ist außerstande, davon Rechenschaft zu geben; es ist das aber eine Schwierigkeit, welche keineswegs der Relativitätstheorie anhaftet, sondern jeder Feldtheorie überhaupt. Andrerseits ist diese Tatsache als ein notwendiges Postulat mit der entgegengesetzten Ansicht verbunden, nach welcher die Materie das einzige eigentlich Wirkliche ist, dem gegenüber das Feld nur eine Rolle spielt wie der leere Raum mit seinen Euklidischen Gesetzen in der Vor-Einsteinschen Physik. Wir kommen damit auch in Einklang mit der Alltags erfahrung, daß unser willentliches Handeln primär stets an der Materie angreifen muß, daß wir nur durch die Materie hindurch das Feld zu verändern imstande sind. Das Feld ist ein in sich kraftloses extensives Medium, das die Wirkungen von Körper zu Körper überträgt. Die Feldgesetze, gewisse Bindungen des inneren differentiellen Zusammenhangs der möglichen Feldzustände, vermöge deren das Feld allein zur Wirkungsübertragung fähig ist, haben für die Wirklichkeit kaum eine weiter tragende Bedeutung wie die Gesetze der Geometrie nach früherer Ansicht. Daneben treten die tiefer liegenden physikalischen Gesetze, nach welchen die Materie die Feldzustände *verursacht*. Auf sie geht die moderne Physik der Materie los; die Quantentheorie enthält die ersten provisorischen Ansätze dafür; aber da tappen wir noch arg im Dunkel.

Die neue Grundeinsicht der allgemeinen Relativitätstheorie: das Führungsfeld ist nicht eine a priori starr gegebene formale Struktur der Welt, sondern steht mit der Materie in Wechselwirkung, schwebt über der in 1. und 2. angeschnittenen Streitfrage. In den Ausführungen Einsteins und auch in dem neuen Buche Borns über die Relativitätstheorie²⁾ kommt

1) Vgl. G. Mie, a. a. O., 1. Abhandlung S. 514 ff.

2) M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins. Springer, Berlin 1920.

soviel ich verstehe, eine inkonsequente Mischung dieser beiden entgegengesetzten Auffassungsmöglichkeiten zum Ausdruck. In der ersten bis dritten Auflage von RZM stellte ich mich — die Schönheit und Einheit der reinen Feldtheorie hatte es mir angetan — ganz auf den ersten Standpunkt; in der vierten bin ich jedoch, aus triftigen Gründen an der Feldtheorie der Materie irre geworden, zu dem zweiten übergegangen.

II.

Der Stein des Anstoßes war für mich die Feldformel des ruhenden Elektrons, welche sich aus der Maxwell'schen Theorie der Elektrizität und der Einstein'schen Gravitationstheorie (ohne das kosmologische Glied) ergibt. Bezeichnungen: metrische Fundamentalform

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

im statischen Fall

$$x_0 = t, \quad ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2;$$

die Lichtgeschwindigkeit f und

$$d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

hängen nur von den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ ab. Wenn Kugelsymmetrie herrscht, kann die radiale Maßskala so gewählt werden, daß

$$d\sigma^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2$$

wird; f und l hängen nur von der Entfernung r ab, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. $1 + lr^2 = h^2$. — g = Determinante der g_{ik} . Komponenten des elektromagnetischen Potentials φ_i , des Feldes

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

Im statischen Fall $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, $\varphi_0 = \varphi$. $\delta_i^k = 1$ oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist. R_{ik} der Krümmungstensor 2. Stufe, $R_i^i = R$. Verwandlung eines lateinischen in den entsprechenden deutschen Buchstaben bedeutet Multiplikation mit \sqrt{g} . \mathfrak{T}_i^k die tensorielle Energiedichte des elektromagnetischen Feldes, \varkappa die Gravitationskonstante im Einstein'schen Gesetz

$$(1) \quad \mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R} = 8\pi \varkappa \mathfrak{T}_i^k.$$

Ferner

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \cdot g^{ik} \left(\begin{Bmatrix} i & r \\ s & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & s \\ r & s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i & k \\ r & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r & s \\ s & s \end{Bmatrix} \right),$$

$$\delta \mathfrak{G} = \frac{1}{2} \mathfrak{G}^{ik} \delta g_{ik} + \frac{1}{2} \mathfrak{G}^{ik,r} \delta g_{ik,r} \quad \left(g_{ik,r} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right).$$

Für das Elektron haben wir

$$(2) \quad \varphi = \frac{e}{r}, \quad f^2 = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{x e^2}{r^2}.$$

Darin sind e und m zwei Konstanten. Aus dem Verhalten des Feldes im Unendlichen folgt, daß e die das elektrische Feld erzeugende *Ladung*, m die das Gravitationsfeld erzeugende *Masse* ist (sie hat die Dimension einer Länge, ihr Energiewert beträgt m/x). Man hat dem Elektron einen endlichen Radius zugeschrieben, um nicht auf eine unendliche Gesamtenergie des von ihm erzeugten elektrostatischen Feldes und damit auf eine unendlich große träge Masse zu kommen. Das Erstaunliche an unserer Feldformel ist nun dies, daß in ihr eine endliche Masse m auftritt, ganz unabhängig davon, bis zu einem wie kleinen Wert von r herab wir diese Formel als gültig ansehen, die also offenbar nichts zu tun hat mit der Energie des mitgeführten Feldes; wie reiht sich das zusammen? Nach Faraday ist die von einer Fläche Ω umschlossene Ladung nichts anderes als der Fluß des elektrischen Feldes durch Ω . Analog werden wir erkennen, daß nach ihrer wahren Bedeutung die Masse sich als *Feldfluß* durch eine das Teilchen umschließende Hülle ausdrückt.

Für die totale Energie

$$\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + t_i^k,$$

die sich aus elektromagnetischer und Gravitations-Energie zusammensetzt, gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_a} = 0.$$

Er ist eine mathematische Identität, wenn wir nach den Gravitationsgleichungen

$$8\pi x \mathfrak{T}_i^k \text{ durch } \mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R}$$

ersetzen; dann ist, unter Fortlassung des Faktors $8\pi x$,

$$\mathfrak{S}_i^k = \left(\mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2} \mathfrak{G}^{\alpha\beta,k} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \right) + (\mathfrak{G} - \frac{1}{2} \mathfrak{R}) \delta_i^k.$$

Ein abgeschlossenes isoliertes System durchfegt im Laufe seiner Geschichte einen „Weltkanal“, außerhalb dessen das metrische Feld in das Euklidische der speziellen Relativitätstheorie übergeht und die Energiekomponenten verschwinden. Energie und Impuls des Systems J_i (welche den Faktor κ in sich aufgenommen haben) bestimmen sich aus

$$8\pi J_i = \int \mathfrak{S}_i^0 dx_1 dx_2 dx_3.$$

Dabei müssen die Koordinaten so gewählt sein, daß für sie außerhalb des Kanals $ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ wird und jede „Ebene“ $x_0 = \text{const.}$ den Kanal in einem endlichen Bereich durchschneidet; die Integration erstreckt sich über den Schnittbereich. J_i sind die Komponenten eines vom Orte unabhängigen invarianten Vierervektors in der Euklidischen Umwelt des Systems; er ist unabhängig von dem benutzten Koordinatensystem, sofern dasselbe nur den angegebenen Forderungen entspricht, und genügt dem Erhaltungssatz

$$\frac{dJ_i}{dt} = 0 \quad (x_0 = t).$$

Das sind die Grundgleichungen der Mechanik für den besonderen Fall, daß auf das System gar keine äußeren Kräfte wirken.

Im statischen Fall ist natürlich (bei Benutzung der statischen Koordinaten) $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ und $8\pi J_0$ gleich dem Raumintegral von

$$\mathfrak{S}_0^0 = \mathfrak{R}_0^0 - (\tfrac{1}{2} \mathfrak{R} - \mathfrak{G});$$

J_0 die träge Masse des Systems, welche nach der Grund einsicht der allgemeinen Relativitätstheorie mit der schweren Masse wesensgleich ist. Eine kurze Rechnung zeigt aber¹⁾, daß dieses Raumintegral sich in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt; und zwar ergibt sich, daß die von Ω umschlossene Masse gleich dem Fluß der (uneigentlichen) räumlichen Vektor dichte

$$(3) \quad m^i = \frac{\sqrt{g}}{16\pi} \left(\gamma^{\alpha\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ i & \end{smallmatrix} \right\} - \gamma^{ia} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \end{smallmatrix} \right\} \right) \quad (i \alpha \beta = 1, 2, 3)$$

1) Für die explizite Durchführung dieser ganzen Betrachtung verweise ich auf RZM, § 33.

durch Ω ist. Im Falle der Kugelsymmetrie ist das ein radialer Fluß von der Stärke

$$\frac{f h}{8\pi r} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right).$$

Im Felde des Elektrons ist $f h = 1$, die Flußstärke wird daher

$$= \frac{1 - f^2}{8\pi r} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{r^3}\right)$$

und der Fluß durch eine Kugel vom Radius r :

$$(4) \quad = m - \frac{x}{2} \frac{\epsilon^2}{r}, \quad \text{im Unendlichen} = m.$$

Damit ist es uns gelungen, die Masse als einen Feldfluß darzustellen; und wir haben zugleich das wichtige Resultat erhalten, daß die träge und schwere Masse (die Masse als Angriffspunkt des Führungsfeldes) gleich der gravitationsfelderzeugenden Masse ist. Da für ein endliches isoliertes ruhendes System das metrische Feld im Unendlichen stets kugelsymmetrisch sein und daher zufolge der Gravitationsgleichungen die ermittelte Gestalt besitzen wird, gilt dieses Resultat allgemein. Weil aber die Vektor-dichte (3) eine uneigentliche ist, nicht invariant gegenüber einem Wechsel des Koordinatensystems, so hat der Begriff der Masse einen Sinn nur für einen Körper, der von andern Körpern hinreichend isoliert ist, nicht aber für ein beliebiges Körperstück; er muß nämlich von einem keine andern Körper einschließenden metrischen Felde umgeben sein, das mit hinreichender Annäherung als ein Euklidisches betrachtet werden kann.

Unser obiges Dilemma klärt sich nun vermöge der Formel (4) vollständig auf. Wenden wir die Feldgleichungen (2) bis zu beliebig kleinen Werten von r herab an — mögen auch solche Verhältnisse in der Natur vielleicht nicht realisiert sein —, so erscheint der Nullpunkt als eine Singularität im Felde. Der Energiewert der von der Kugel r umschlossenen Masse beträgt $\frac{m}{x} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{r}$. Die Massendichte stimmt danach mit der Energiedichte überein, aber wegen der Singularität im Zentrum ist trotz unendlicher Energie die Masse endlich. Das „Anfangsniveau“ im Zentrum, von dem aus die Masse gerechnet werden muß, ist nicht $= 0$, sondern $= -\infty$; die Masse des Elektrons

kann deshalb überhaupt nicht von hier aus bestimmt werden, sondern bezeichnet das Auslaufniveau in unendlich großer Entfernung.

Mag es physikalisch zulässig sein oder nicht, die letzten Elementarbestandteile der Materie als wirkliche Singularitäten im Felde aufzufassen, jedenfalls lassen sich Ladung e und Energieimpuls J_i eines Teilchens ebenso wie die auf das Teilchen einwirkende Feldkraft K_i bestimmen aus dem Verlauf des das Teilchen umgebenden Feldes; Volumintegrale über das Innere des Teilchens sind dazu nicht erforderlich. Infolgedessen kann aus ihren Werten auch nicht das geringste geschlossen werden über die innere Beschaffenheit des Korpuskels; insbesondere schließt der Umstand, daß sie einen bestimmten endlichen Wert besitzen, die „Singularitätsauffassung“ keineswegs aus. Ebenso können die „mechanischen Gleichungen“, welchen diese Größen genügen,

$$(5) \quad \frac{d e}{dt} = 0, \quad \frac{d J_i}{dt} = K_i$$

bewiesen werden allein durch Betrachtung des umgebenden Fledes, ohne auf die Zustände im Innern des Teilchens Rücksicht zu nehmen. Wie das zu verstehen ist, will ich hier an dem einfachsten dieser Gesetze, der Erhaltungsgleichung für die Ladung, klar machen. Dabei haben wir es nur mit der Elektrizität zu tun und können uns der Einfachheit halber auf den Boden der speziellen Relativitätstheorie stellen.

Die im Äther gültigen Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$(6) \quad \frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Eine Lösung derselben ist $f_{ik} = \text{const.}$; die einzige statische kugelsymmetrische aber (welche im Zentrum eine Singularität bekommt), die aus dem Potential $\varphi = \frac{e}{r}$ entspringende ($e = \text{const.}$)

Wir wissen durchaus nichts davon, daß im Gebiet der Materie die Gleichung (6) durch eine inhomogene zu ersetzen ist, auf deren rechter Seite eine neue Feldgröße, die „Dichte des Viererstroms“ — in der Lorentzschen Elektronentheorie als reiner Konvektionsstrom ϱu^i —, auftritt. Von einem Elektron können wir lediglich behaupten, daß außerhalb einer gewissen dasselbe umgebenden Fläche Ω die homogenen Gleichungen (6)

gelten und bei Benutzung eines Koordinatensystems, in welchem das Elektron momentan ruht, f_{ik} im wesentlichen mit dem statischen, aus dem Potential $\varphi = \frac{e}{r}$ entspringenden Felde f_{ik}^0 identisch ist; im wesentlichen, d. h. bis auf ein additiv hinzutretendes Feld f_{ik}' , das im Gebiet der Fläche Ω ohne merklichen Fehler als konstant betrachtet werden kann. Bei Benutzung dieses Koordinatensystems schickt dann das elektrische Feld den Fluß $4\pi e$ durch die Hülle Ω hindurch und nicht den Fluß 0, wie es der Fall wäre, wenn das Feld auch im Innern des Teilchens regulär wäre und den Gleichungen (6) genügte. Das Glied des Konvektionsstroms ϱu^i in der Lorentzschen Theorie bringt den Einfluß dieser Ladungssingularitäten in Bausch und Bogen zum Ausdruck für ein Gebiet, das viele Elektronen enthält; es ist aber ganz unberechtigt, die Lorentzschen Gleichungen etwa so zu interpretieren, daß sie auf die „Volumelemente des Elektrons“ Anwendung finden könnten. Unser Ansatz ist übrigens zutreffend nur im Falle quasistationärer Beschleunigung, wenn die Weltlinie des Teilchens hinreichend wenig von einer Geraden abweicht.¹⁾

1) Gewöhnlich nimmt man, darüber hinausgehend, an, daß bei beliebiger Bewegung des Elektrons das Feld in seiner Umgebung durch die bekannten Liénard-Wiechertschen Formeln geliefert wird. Sie ergeben für ein beschleunigtes Elektron *Ausstrahlung* und enthalten eine Auszeichnung der Richtung des Zeitablaufs. Schon darin zeigt sich, daß sie keineswegs eine notwendige Konsequenz der (umkehrbaren) Maxwellsschen Gleichungen sein können. In der Tat erhält man z. B. zu einem um ein Zentrum O gleichförmig kreisenden Elektron durch Superposition der nach Liénard-Wiechert berechneten „auslaufenden“ und der „einalaufenden“ Welle ein Feld ohne einseitigen Energiestrom, das in dem um O mitrotierenden Koordinatensystem stationär ist. Mir scheint das ein an sich ebenso berechtigter und möglicher stationärer Zustand der Welt zu sein wie der des statischen Feldes, das von einem ruhenden Elektron erzeugt wird. Zumal in der räumlich geschlossenen Welt, auf die sich Einstein auch zur Begründung des statischen Potentials e/r beruft, ist nur dieser Zustand und nicht der der auslaufenden Welle dauernd möglich. Man vgl. dazu G. Mie, Physik. Zeitschr. 21. S. 657. 1920; S. R. Milner, Phil. Mag. 41. S. 405—419. 1921; der Beweis von Oseen für die Notwendigkeit der Austrahlung (Physik. Zeitschr. 16. S. 395. 1915) beruht weniger auf den Maxwellsschen Gleichungen als auf den postulierten Anfangs- und Randbedingungen; vgl. ferner, was die Beziehung zur Kosmologie betrifft, meine zu Anfang erwähnte Note

Nach dieser Beschreibung gehört zu dem Teilchen in jedem Moment seiner Bewegung ein Ladungswert e . Ich behaupte, daß sich aus den Maxwellschen Gleichungen (6), welche außerhalb des von Ω beschriebenen Weltkanals gelten, die Erhaltungsgleichung $\frac{d e}{d t} = 0$ ergibt. Zum Beweise benutzen wir den folgenden Kunstgriff: Wir führen innerhalb des Kanals ein singularitätenfreies *fingiertes Feld* $f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ ein, das sich stetig an das im Äußern wirklich herrschende Feld anschließt. Dann wird innerhalb des Kanals im allgemeinen die „*eingierte Stromdichte*“

$$(7) \quad \mathfrak{s}^i = \frac{\partial f^{ik}}{\partial x_k}$$

nicht verschwinden; für sie gilt zufolge der Definition als eine mathematische Identität der Erhaltungssatz

$$(8) \quad \frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0.$$

Das Koordinatensystem liege so, daß jede „Ebene“ $x_0 = \text{const.}$ den Kanal in einem endlichen (von Ω begrenzten) Bereich durchschneidet. Das über diesen Bereich erstreckte Integral

$$\int s^0 dx_1 dx_2 dx_3 = e^*$$

ist eine Funktion von $x = t$; aus (8) ergibt sich aber sogleich durch Integration $\frac{d e^*}{d t} = 0$. Ferner schließen wir aus (8) mit Hilfe des Gaußschen Satzes, daß e^* gleich dem Fluß der Vektordichte s^i durch eine beliebige dreidimensionale Fläche ist, welche den Kanal durchsetzt. Infolgedessen ist e^* vom gewählten Koordinatensystem unabhängig. Es ist aber auch unabhängig von der Wahl des fingierten Feldes; denn es läßt sich nach (7) als Fluß der „räumlichen“ Vektordichte mit den Komponenten f^{01}, f^{02}, f^{03} durch Ω darstellen, und auf Ω stimmt das fingierte Feld mit dem wirklichen überein. Endlich geht daraus hervor, wenn wir diesen Fluß an einer bestimmten

in der Physik. Zeitschr. Eine andere Frage ist es natürlich, woher die Quantenauswahl der stationären Zustände röhrt und wie sich der Übergang zwischen den verschiedenen stationären Zuständen vollzieht.

Zeitstelle in dem Ruh-Koordinatensystem berechnen, daß dort $e^* = e$ ist. Damit ist der Beweis beendet. Er läßt erkennen, daß die Ladung des Elektrons in zwei Augenblicken dieselbe ist auch dann, wenn zwischen diesen beiden Momenten das Elektron durch rasch wechselnde stationäre Zustände hindurchgegliitten ist, obschon wir während dieser Zeit nichts über das Verhalten des Feldes in der Umgebung des Elektrons wissen.¹⁾

Auf ähnlichem, wenn auch komplizierterem Wege gelingt der Beweis der andern mechanischen Gleichungen, wie ich ihn in meinem Buche durchgeführt habe (S. 273—279). *Das Gesetz für die Erzeugung des metrischen Feldes durch ein materielles Teilchen* lautet folgendermaßen: In einem gewissen, zu dem Teilchen in seiner augenblicklichen Lage gehörigen Koordinatensystem²⁾ \mathfrak{K} , in welchem das Teilchen selber momentan ruht, ist das metrische Feld in der Umgebung des Teilchens auf und außerhalb Ω ein statisches kugelsymmetrisches: und zwar haben f und h die Werte

$$(9) \quad f^2 = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r},$$

welche durch die Feldgleichungen $\mathfrak{R}_i^k = 0$ gefordert sind. Die Konstante m wird als die *Masse* des Teilchens bezeichnet. Da die Ableitungen der g_{ik} dieses Feldes im Unendlichen gegen 0 konvergieren (und zwar in zweiter Ordnung), so ist \mathfrak{K} ein *geodätisches* Koordinatensystem an der betreffenden Stelle für das äußere Feld des Teilchens. Die Annahme ist berechtigt im Falle quasistationärer Beschleunigung, d. h. wenn die Weltlinie des Teilchens sich hinreichend schwach aus der durch das Führungsfeld bestimmten geodätischen Weltlinie herauskrümmt. Sie führt zu den Gleichungen (5) mit den klassischen Werten:

$$\text{Energie-Impuls } J_i = m u_i, \quad \text{Feldkraft } K_i = z e f_{0i}.$$

$u^i = \frac{dx_i}{ds}$ sind die Komponenten der Weltrichtung des Teilchens, die zu verwendenden Werte von g_{ik} sind die zum äußeren Felde .

1) Ich halte es für unwahrscheinlich, daß sich für diesen Feldzustand überhaupt eine universelle, eine einzige Konstante e enthaltende Beschreibung geben läßt.

2) Natürlich ist es unmöglich, daß ein solches Gesetz, wie Lenard in seiner Argumentation anzunehmen scheint, in jedem Koordinatensystem gültig ist.

gehörigen, so daß $ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ ist. Insbesondere folgt daraus

$$(10) \quad \frac{dm}{dt} = 0.$$

Kehren wir zu einem beliebigen Koordinatensystem zurück, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$(11) \quad \frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = \frac{s e}{m} \cdot f_{ik} u^k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die Bestimmung der Feldkraft setzt außer den schon erwähnten Annahmen noch folgendes voraus:

1. Im Koordinatensystem Ω hat das elektromagnetische Feld in der Umgebung des Teilchens die früher angegebene Gestalt $f_{ik}^0 + f_{ik}$; dabei ist f_{ik} das äußere Feld, das in (11) einfach mit f_{ik} bezeichnet wurde.

2. Ω ist so groß, daß auf Ω das äußere Feld f vielmehr stärker ist als das vom Elektron herrührende f^0 ; d. h. die mechanischen Gleichungen gelten nur mit solcher Genauigkeit, daß eine Änderung des äußeren Feldes um den Betrag des Elektronenfeldes auf Ω nicht ins Gewicht fällt. Andererseits ist Ω so klein, daß die *Wertunterschiede* von f auf Ω vielmehr kleiner sind als die von f^0 .

3. Das äußere Feld f_{ik} ist so schwach, daß das Quadrat seines Betrages auf Ω klein ist gegenüber $m/\epsilon r^3$ (sonst dürfte nämlich der Einfluß des elektromagnetischen Feldes auf das metrische in der Gegend von Ω nicht vernachlässigt werden).

Damit ist gezeigt, daß für die Festlegung der Begriffe Ladung und Masse und für den Beweis der mechanischen Gleichungen das Feld im Innern des Kanals keine Rolle spielt; es war lediglich ein mathematischer Kunstgriff, wenn wir uns den Kanal mit einem fingierten Felde ausgefüllt dachten. Wird dadurch die Identität zwischenträger Masse und Feldenergie, welche die spezielle Relativitätstheorie aufgedeckt zu haben schien, wieder zerrissen, so ist doch zu betonen, daß das physikalisch Bedeutungsvolle an der Erkenntnis von der *Trägheit der Energie* bestehen bleibt. Die Gleichung (10) ist gebunden an unsere Annahme über die Feldbeschaffenheit in der Umgebung des Teilchens. Ist das Teilchen statt mit einem statischen Feld z. B. mit einer elektromagnetischen Dipolwelle umgeben, wie das für ein Atom im Zustande der Ausstrahlung

der Fall sein wird, so liefert dieselbe Betrachtung auf besonders einfache und strenge Weise statt (10) das Resultat: der Verlust an Masse m , welchen das Teilchen zwischen zwei Augenblicken 1 und 2 erlitten hat, ist gleich der mit \mathbf{x} zu multiplizierenden elektromagnetischen Energie, welche während dieser Zeit durch die das Teilchen umgebende Hülle Ω hindurchgestrahlt wird. Man versteht, wie dieses Resultat zustande kommt: die Masse ist ein Integral, das über die Fläche Ω in

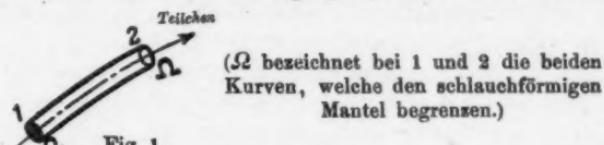


Fig. 1.

den Augenblicken 1 und 2 erstreckt wird, die hindurchgestrahlte Energie aber stellt sich dar als ein Integral über den „Schlauch“, den die Fläche Ω während der Zeit von 1 bis 2 in der Welt beschreibt.

Die erreichte Klärung des Massenbegriffs erscheint mir als eine der physikalisch bedeutungsvollsten Leistungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

III.

Die Masse ist ihrem Wesen nach eine *Länge*. Da nach der Relativitätstheorie Zeit- und Längeneinheit nicht unabhängig voneinander sind, kennt sie nur *zwei* ursprüngliche Maßeinheiten; als solche werden zweckmäßig die Länge (l) und die Elektrizitätsmenge (e) gewählt. Die Koordinaten x_i , welche nicht gemessen, sondern willkürlich in die Welt hineingelegt werden, sind als dimensionslose Zahlen zu betrachten, die metrische Fundamentalform ds^2 und ihre Koeffizienten g_{ik} haben die Dimension l^2 . Wenn wir aber, wie es bei unserer Definition der Masse geschah, uns auf solche Koordinaten beschränken, für welche im Unendlichen

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird, so müssen wir, wenn sich bei einem Wechsel in der Wahl der Längeneinheit ds^2 mit der Konstanten l^2 multipliziert, gleichzeitig auch die Koordinaten x_i mit der Konstanten l multiplizieren. Dann bekommen die Koordinaten die

Dimension l , und die g_{ik} werden dimensionslos. Die Flußstärke m^i erhält also die Dimension l^{-1} , die Masse selbst l , die Energie e^2/l . Die im Einsteinschen Gesetz vorkommende Gravitationskonstante κ ist eine Äquivalenzzahl für die Umwandlung von Masse in Energie; ihre Bedeutung tritt physikalisch am klarsten hervor in der Tatsache, daß der Massenverlust eines strahlenden Körpers gleich κ mal der ausgestrahlten Energie ist. Sie hat offenbar die Dimension l^2/e^2 . (Wäre sie wirklich eine absolute, in der universellen Gesetzmäßigkeit der Natur allein begründete — und nicht, wie es wahrscheinlich ist, eine von der zufälligen Gesamtmasse der Welt abhängige — Konstante, so würde sie gestatten, die Dimension e mit l zu identifizieren.) Endlich sei noch bemerkt: Nach unserer jetzigen Auffassung gehört das Glied $8\pi\kappa \mathfrak{L}_i^k$ des Einsteinschen Gravitationsgesetzes (1) mit auf die linke Seite; das Gesetz besteht aus *homogenen* Gleichungen, die zusammen mit den homogenen Maxwell'schen Gleichungen die Eigengesetzmäßigkeit des „Äthers“ (des kombinierten elektromagnetischen und metrischen Feldes) zum Ausdruck bringen, nicht aber aus inhomogenen Gleichungen, nach welchen die „Materie \mathfrak{L}_i^k “ das Feld erzeugt.

Um die Tatsache des Vorhandenseins materieller Teilchen mit einer von 0 verschiedenen Ladung und Masse in der Welt trotz der Gültigkeit jener homogenen Gleichungen im Äther zu erklären, stehen zwei Wege zur Verfügung: entweder die Gleichungen so zu modifizieren, wie es von Mie in seinen „Grundlagen einer Theorie der Materie“ versucht wurde, oder die Materie als eine wirkliche Singularität im Felde gelten zu lassen. Der erste Weg mußte notwendig im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie beschritten werden, die hier gewonnene Definition der Masse und Herleitung der mechanischen Gleichungen öffnet den zweiten. Gewiß ist es physikalisch unmöglich, daß der Verlauf der Zustandsgrößen irgendwo im Innern des extensiven vierdimensionalen Mediums der Welt wirkliche Singularitäten aufweist; in der speziellen Relativitätstheorie, wo dieses Medium ein Euklidisches ist und daher auch die Zusammenhangsverhältnisse der Welt die einer vierdimensionalen Euklidischen Mannigfaltigkeit sein müssen, war auch aus diesem Grunde der zweite Weg durchaus verschlossen. In der allgemeinen Relativitätstheorie aber kann die Welt beliebige andere

Zusammenhangsverhältnisse besitzen: nichts steht im Wege, anzunehmen, daß sie von solcher Analysis-situs-Beschaffenheit ist, wie ein vierdimensionales Euklidisches Kontinuum, aus welchem einzelne Schläuche von eindimensional unendlicher Erstreckung herausgeschnitten sind. Im Innern dieser Schläuche ist kein „Raum“ mehr, ihre Grenzen sind genau so wie das Unendlichferne nie erreichbare „Säume“ des extensiven Feldes. Das einfach zusammenhängende Kontinuum, aus welchem wir das Feldgebiet durch Herausschneiden von Schläuchen konstruieren, ist überhaupt eine bloße mathematische Fiktion, wennschon die im Felde herrschenden metrischen Verhältnisse es sehr nahe legen, den wirklichen Raum durch Hinzufügung solcher erdichteter uneigentlicher Gebiete, welche den verschiedenen Materieteilchen entsprechen, zu einem einfach zusammenhängenden zu ergänzen. Man muß sich hier durchaus auf den freien Standpunkt der Analysis situs stellen. Sie betrachtet z. B. ein Gebilde G wie das nebenstehend gezeichnete und schraffierte, das nur aus inneren Punkten besteht (die Randkurven gehören nicht mehr dazu), indem sie lediglich den stetigen Zusammenhang seiner Punkte im großen ins Auge faßt, als ein Wesen sui generis, das nichts mit der Vollebene zu tun hat. Denken wir es uns aus der Vollebene E durch Herausschneiden entstanden, so heißt das, wir betrachten G nicht für sich, sondern in demjenigen Verhältnis zu einer Ebene E , das durch eine bestimmte eindeutige Abbildung von G auf E vermittelt ist (jedem Punkt von G korrespondiert ein mit ihm stetig sich ändernder Punkt von E). Aber auch ohne eine solche Beziehung zu E zu stiften, hat es einen Sinn, G drei verschiedene „Säume“ oder „Löcher“ zuzuschreiben. Das muß man etwa so verstehen. Eine beliebige zweidimensionale Mannigfaltigkeit wird in der Analysis situs immer wie die Oberfläche eines Polyeders aufgebaut aus einzelnen einfach zusammenhängenden Elementarflächenstücken.¹⁾ Eine geschlossene Mannig-



Fig. 2.

1) L. E. J. Brouwer, Math. Annalen 71, S. 97. 1912; H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche. §§ 4, 5; ders., Math. Zeitschrift 10. S. 78. 1921.

faltigkeit besteht aus endlich vielen, eine *offene* aus einer abzählbar unendlichen Reihe solcher Zellen, die wir uns in einer bestimmten Reihenfolge mit Z_1, Z_2, Z_3, \dots bezeichnet denken. (Vgl. die Zelleinteilung eines Kreisrings in der nachstehenden Figur.) Eine Vereinigung von Zellen möge ein *Kontinuum* heißen, wenn man jede Zelle A derselben mit jeder B durch eine endliche Kette von der Vereinigung angehörigen



(Die inneren Kreise häufen sich gegen die beiden gestrichelten Grenzkreise.)

Fig. 3.

Zellen $A = Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(m-1)}, Z^{(m)} = B$ so „verbinden“ kann, daß immer $Z^{(i+1)}$ längs einer Kante an $Z^{(i)}$ grenzt. Ein Kontinuum heiße „endlich“ oder „unendlich“, je nachdem es aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Zellen besteht. Vollzieht man nun den Abbau unseres aus unendlich vielen Zellen bestehenden Gebietes G dadurch, daß man der Reihe nach Z_1, Z_2, Z_3, \dots fortnimmt, so besteht der Rest, wenn dieser Prozeß eine gewisse Grenze überschritten hat, beständig aus *drei* (immer kleiner werdenden) *unendlichen Kontinua* mit einer im allgemeinen wechselnden Anzahl endlicher Kontinua; diese drei unendlichen Kontinua bilden die immer enger werdenden *Umgebungen der drei Säume von G*.

Nach der zweiten Auffassung ist die Materie selber also überhaupt nichts Räumliches (*Extensives*), aber sie steckt in einer bestimmten räumlichen Umgebung drin. Wir können sie quan-

titativ charakterisieren nur durch ihre Feldwirkungen; die Ladung e z. B. ist der Fluß des elektrischen Feldes, welchen das Teilchen durch eine im Felde gelegene, das Teilchen umschließende Hülle Ω hindurchschickt. Von der unmittelbaren räumlichen Umgebung des Teilchens nehmen seine Feldwirkungen ihren Ausgang.

Diese ganze Anschauung gewinnt außerordentlich an Einheitlichkeit, wenn der Äther nicht aus zwei miteinander in keinem inneren Zusammenhang stehenden, im extensiven Medium der Außenwelt herrschenden Feldern besteht, sondern lediglich das mit einer von der Materie abhängigen metrischen Struktur begabte extensive Medium selber ist; so lehrt es die von mir aufgestellte erweiterte Relativitätstheorie. Wenn schon die Physik es in gewissem Sinne nur mit dem Äther zu tun hat, das Agens der Materie eigentlich jenseits der physischen Sphäre liegt, ist es doch ihre Aufgabe, neben der Eigengesetzmäßigkeit des Feldes auch die Gesetze zu studieren, nach denen die Materie die Feldwirkungen auslöst; diese formulieren sich als eine Art Randbedingungen für die metrischen Zustandsgrößen des Feldes. Der Äther, sagten wir schon oben, spielt für die Wirklichkeit kaum eine andere Rolle wie einst der Raum mit seiner starren Euklidischen Metrik: nur hat sich der unbewegte in einen allen Eindrücken zart nachgebenden geschmeidigen Diener gewandelt.

Der *Substanz-* und der *Feld-*Vorstellung reiht sich als dritte diese Auffassung der Materie als eines die Feldzustände verursachenden *Agens* an. Sobald einmal die Bahn für sie frei gelegt ist, glaube ich, wird man die Feldtheorie, die vom neuen Standpunkt aus etwas Phantastisch-Unwirkliches bekommt, verlassen und zu ihr übergehen müssen. Sie läßt neben der streng *funktionalen* Feldphysik Raum für die moderne Physik der Materie, die mit *statistischen* Begriffen operiert. Nicht nur die Materie wird in ihre alten Wirklichkeitsrechte wieder eingesetzt, sondern auch der echte Gedanke der Kausalität, der *Verursachung*, wie wir sie am unmittelbarsten in unserem Willen erfahren, erwacht zu neuem Leben. Von Mach als Fetischismus gebrandmarkt, war diese Idee doch immer für jeden Physiker in seinem lebendigen Verhältnis zur Natur unentbehrlich geblieben, möchte auch seine Erkenntnistheorie nur „funktion-

nale Beziehungen“ gelten lassen. Aber die funktionalen Beziehungen zwischen den Feldgrößen sind der Ausdruck für die Struktur des Äthers, nicht für die Kausalität, d. i. die Erzeugung der Ätherzustände durch die Materie. Hier wird die ausgezeichnete Ablaufsrichtung der Zeit: Vergangenheit → Zukunft, die in den Feldgesetzen keine Stelle finden kann, wieder aufzunehmen sein; sie ist ja mit der Idee der Verursachung in der Tat aufs engste verbunden. Auch bringt die Materie in gewissem Sinne eine Auszeichnung der Zeit gegenüber den Raumkoordinaten mit sich: die in *einer Dimension* unendliche Erstreckung der inneren Feldsäume. — Die folgenden beiden Gründe scheinen es mir vor allem, welche für die Agens-, gegen die Feldtheorie der Materie sprechen: 1. sie steht allein in Einklang mit der grundlegenden Erfahrung des täglichen Lebens und der Physik, daß die Materie das Feld erzeugt und alles Handeln in der Welt primär an der Materie angreifen muß; 2. die erweiterte Relativitätstheorie läßt keinen Platz für derartige Verallgemeinerungen und Ergänzungen der klassischen Feldgesetze, wie sie Mie im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie ins Auge gefaßt hatte.

Dabei muß freilich zugestanden werden, daß es nach wie vor einigermaßen dunkel bleibt, wie man in der allgemeinen Relativitätstheorie überhaupt die Aussage streng formulieren soll, daß die Materie, als deren Charakteristika *Ladung*, *Masse* und *Bewegung* anzusehen sind, das Feld erzeugt. Deutet man (um der anschaulichen Ausdrucksweise willen) ein Koordinatensystem als Abbildung der wirklichen Welt auf einen vierdimensionalen Cartesischen Raum, so kann man bei gegebener Bewegung der Teilchen ihren Weltkanälen im Bilde durch geeignete Wahl der Koordinaten jede beliebige Gestalt erteilen. Prinzipiell gesprochen, ist also *in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht nur der Begriff der absoluten, sondern auch der der relativen Bewegung verschiedener Körper gegeneinander sinnlos*. Es ist danach klar, daß die Kenntnis von Ladung und Masse jedes Teilchens und des Verlaufs ihrer Weltkanäle im Koordinatenbilde zur eindeutigen Bestimmung des Feldes nicht genügen kann. Vielleicht muß man den Sinn der Aussage, daß die Bewegung eines Teilchens bekannt ist, dahin interpretieren, daß in dem zur Darstellung der Welt gewählten Koordinaten-

system \mathbf{U} nicht nur der Verlauf des Teilchenkanals gegeben ist (denn das besagt gar nichts), sondern außerdem an jeder Stelle des Kanals das oben mit \mathfrak{R} bezeichnete Koordinatensystem, in welchem das umgebende Feld die Normalform (9) besitzt, oder genauer: die Transformationsformeln, vermöge deren das lokale \mathfrak{R} mit dem universellen \mathbf{U} zusammenhängt. Wir müßten dann sagen: der Begriff der Bewegung eines Teilchens hat keinen *kinematischen*, sondern einen *dynamischen* Inhalt; die bisher meist gegebene Formulierung „von Bewegung eines Körpers (im kinematischen Sinne) kann nicht *absolut*, sondern nur *relativ* zu andern Körpern die Rede sein“ trüfe nicht den richtigen Gegensatz.¹⁾

Da zufolge unserer Erklärung die Masse m keine durch das materielle Teilchen völlig exakt festgelegte Zahl ist und darum auch die Erhaltungsgleichung $\frac{dm}{dt} = 0$ kein mathematisch strenges Gesetz ist, können wir aus ihm heraus nicht verstehen, weshalb ein Elektron selbst nach beliebig langer Zeit immer noch die gleiche Masse besitzt und weshalb allen Elektronen dasselbe m zukommt. Dieser Umstand zeigt, daß es offenbar nur *einen* Gleichgewichtszustand der negativen Elektrizität gibt, auf den sich das Korpuskel in jedem Augenblick von neuem einstellt: die Erhaltung der Ladung und Masse kommt nicht durch eine differentiell wirksame *Beharrungstendenz*, sondern durch *Einstellung* zustande. Daraus dürfen

1) Ich gebe diese Andeutung einer Lösung mit allem Vorbehalt. Wo die Kritiker der Relativitätstheorie diese Schwierigkeit berühren (vgl. namentlich Reichenbächer, Physik. Zeitschr. 22. S. 234 – 248. 1921), treffen sie in der Tat eine dunkle Stelle (freilich kann ich darin keinen zureichenden Grund für die Preisgabe der Theorie erblicken; die eben erwähnte Lösung scheint mir die Reichenbächersche Idee: die Materie bewirkt eine „Verzerrung“ des metrischen Feldes, mit der These Einsteins: Trägheit und Gravitation sind eines, zu versöhnen). Einsteins Kosmologie der geschlossenen Welt hat lediglich zur Folge, daß man neben den Grenzbedingungen für die Materieschlüsse nicht auch noch eine Grenzbedingung für den unendlichfernen Saum des Feldes nötig hat; zur prinzipiellen Klärung der vorliegenden Frage leistet sie darüber hinaus meines Erachtens keinen Beitrag. Mit dem Machschen Gedanken, daß die träge Masse eines Körpers auf einer Wechselwirkung mit den Massen des Universums beruht, kann ich mich nach den hier vertretenen Auffassung des Massenbegriffs erst recht nicht befrieduen.

wir weiter schließen, daß *Ladung und Masse*, wenn wir sie auch nur als Fluß in dem extensiven, das Teilchen umgebenden Felde definieren können, doch als *Eigenschaften des Teilchens selber* anzusprechen sind. Den Gegensatz von Beharrung und Einstellung kann man sich gut klar machen an dem Beispiel eines rotierenden Kreisels — die Richtung seiner Achse, in einem Augenblick willkürlich, überträgt sich von Moment zu Moment durch Beharrung — und einer Magnetnadel, deren Richtung sich in jedem Augenblick unabhängig von der Vergangenheit auf das Magnetfeld einstellt. Von einer rein der Beharrungstendenz folgenden Verpflanzung haben wir a priori keinen Grund anzunehmen, daß sie integrabel sei, d. h. unabhängig vom Wege, auf welchem sich die Verpflanzung vollzieht. Aber sei das auch der Fall, wie z. B. für die Achse des rotierenden Kreisels im Euklidischen Raum; es werden dennoch zwei Kreisel, die von demselben Punkte mit gleicher Achsenstellung ausgingen und sich nach Ablauf einer sehr langen Zeit wieder treffen, beliebige Abweichungen der Achsenstellung aufweisen, da sie ja niemals vollständig gegen jede Einwirkung isoliert werden können.

Auf der Erhaltung der Masse und Ladung beruht es nach der mit Quantenansätzen operierenden Bohrschen Atomtheorie, daß bei der Bewegung eines Atoms die *Radien der Kreisbahnen seiner Elektronen und die Frequenzen des ausgesendeten Lichtes* erhalten bleiben. Ebenso wird man schließen können, daß in einem kristallinischen Medium die Gitterabstände erhalten bleiben. Die Frequenzen der Spektrallinien und die Länge eines materiellen Maßstabes sind daher gleichfalls Größen, die sich durch eine in jedem Augenblick neu erfolgende Einstellung auf das Gleichgewicht erhalten. Das geht auch schon daraus hervor, daß ich *diesem* Maßstab an *dieser* Feldstelle nicht willkürlich anstatt der Länge, die er jetzt einnimmt, irgendeine andere, die doppelte oder dreifache, hätte geben können, wie ich ihm die Richtung beliebig vorschreiben kann; und daß die Spektrallinien der Atome sich von der Vorgeschichte als unabhängig erweisen. Wenn Einstein die Maßbestimmung im Äther mit Hilfe von Maßstäben und Uhren *definiert*, so kann man das nur als eine vorläufige Anknüpfung an die Erfahrung gelten lassen, wie etwa auch die Definition der elektrischen

Feldstärke als ponderomotorische Kraft auf die Einheitsladung. Hernach muß sich hier das Verhalten der Ladung unter dem Einfluß des elektrischen Feldes, dort das Verhalten der Gitterabstände in einem kristallinischen Medium unter dem Einfluß des metrischen Feldes als eine Folgerung der entwickelten Theorie ergeben. Und auf dem eben angedeuteten theoretischen Zusammenhang scheint mir die Erhaltung der (mit Hilfe der lokalen Metrik des Feldes zu bestimmenden) Maßstabslängen und Uhrperioden zu beruhen.

Mit den letzten Erwägungen röhren wir an die physikalischen Grundlagen der „erweiterten Relativitätstheorie“; darauf gehe ich näher in der zu Anfang erwähnten Note ein.

(Eingegangen 28. Mai 1921.)

5. Über die Balmerserie des Wasserstoffs;
von E. Gehreke und E. Lau.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Hierzu Tafel II.)

Die Energieverteilung in den Spektrallinien hat, wie bekannt, Interesse vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie. Man nimmt an, daß bei Abwesenheit störender Effekte, wie besonders Druck, elektrisches und magnetisches Feld, die Energieverteilung in einer einzelnen Spektrallinie sich nur gemäß dem Dopplerschen Prinzip auf einen gewissen Spektralbereich verteilt, der durch die Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle gegeben ist und durch Temperatur und Molekulargewicht bestimmt wird. Die bei den verschiedenen chemischen Elementen gewonnenen Messungen von Michelson¹⁾ bestätigen diese Auffassung zwar in einer großen Anzahl von Fällen; gerade beim Wasserstoff, welcher von allen Elementen die breitesten Spektrallinien aufweist und aus diesem Grunde am leichtesten zu untersuchen ist, läßt aber die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment besonders zu wünschen übrig.²⁾ Wir haben uns im Verfolg einer von Hrn. W. Wien ausgegangenen Anregung der Aufgabe unterzogen, die Sachlage zu klären und dabei die im folgenden beschriebenen Ergebnisse über die Feinstruktur, Intensitätsverteilung und Breite der Wasserstofflinien erhalten. Wir teilen im folgenden zunächst nur unsere Beobachtungen an der Balmerschen Serie mit; über das sogenannte Viellinienspektrum soll später berichtet werden.

§ 1. In einer früheren Mitteilung³⁾ haben wir unsere Lichtquelle für die Erzeugung von Wasserstoffspektren be-

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) 26. S. 280. 1892.

2) Vgl. hierüber die Zusammenstellung von O. Schönrock, Ann. d. Phys. 20. S. 995. 1906.

3) E. Gehreke u. E. Lau, Physik. Zeitschr. 21. S. 634—635. 1920.

schrieben, welche uns instand setzte, das Spektrum unter Ausschaltung des hier sehr störenden Starkeffektes zu erzeugen und Linienverbreiterungen, die durch den Starkeffekt bedingt sind, zu vermeiden. Außer dem dort beschriebenen Rohr haben wir auch noch Rohre von 2, 3 und 5 cm lichter Weite und einer Länge bis zu 2,5 m hergestellt. In allen diesen Rohren beobachteten wir im Einklang mit Wood¹⁾, daß für die Entstehung der Balmerserie die Anwesenheit von Wasserdampf günstig ist, im Gegensatz zur Entstehung des Viellinienspektrums, das besser im *trockenen* Wasserstoff zur Ausbildung kommt. Die Träger der Balmerserie, neutrale Wasserstoffatome, bilden sich also offenbar unter Mitwirkung von Wasserdampf in größerer Zahl als in *trockenem* Wasserstoff. Es weist also schon diese Beobachtung der Wirkung des Wasserdampfes auf das Spektrum des Wasserstoffs darauf hin, daß die Träger der Balmerserie und des Viellinienspektrums verschieden sind.

Das Licht der Wasserstoffröhren fiel auf den Spalt eines Interferenzspektroskops nach Lummer-Gehrcke; an Stelle des Okulars konnte eine Kamera zur photographischen Aufnahme der Linien gesetzt werden. Zur Bestimmung der Breite, auch genannt „Halbwelt“ der Linien wurden folgende Wege beschritten:

a) Es wurde nach dem Vorgange von Stark²⁾ der Spalt des Kollimators in zwei Hälften geteilt, die verschieden stark beleuchtet werden. Hierzu diente uns eine auf die Achse eines kleinen Elektromotors (110 Volt, 50 Watt) aufgesetzte Blende, welche so eingerichtet war, daß sie während einer halben Umdrehung die untere Hälfte 1 des Kollimators beschattete, während die obere Kollimatorhälfte 2 dauernd frei blieb. Es empfing so die obere Kollimatorhälfte 2 doppelt so viel Licht als die untere 1. Auf der Photographie erhält man so zwei halbe Spaltbilder, deren Beleuchtungsstärken sich wie 2:1 verhalten, und man braucht jetzt nur auf der stärker beleuchteten Spalthälfte 2 sich diejenige Schwärzung zu suchen, welche mit der stärksten Schwärzung der schwächer beleuchteten Spalthälfte 1 gleich stark ist; der Abstand der beiden, auf diese

1) R. W. Wood, Proc. Roy. Soc. London (A) 97. S. 455. 1920.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 35. S. 463—464. 1911.

Weise gefundenen Intensitäten auf jeder Seite eines Hauptmaximums in 2 bestimmt dann die „Halbwelte“ der Spektrallinie.

Am besten geschieht auf diese Weise die Bestimmung der halben Intensitäten und damit der Halbwelte der Linie, wenn man in der Lage ist, die Photographie mittels Kochschen Registrierphotometers auszuphotometrieren. Dank dem liebenswürdigen Entgegenkommen der Herren Koch und Goos vom Physikalischen Institut der Universität Hamburg konnte eine derartige Registrierung vorgenommen werden. Fig. 1 stellt eine

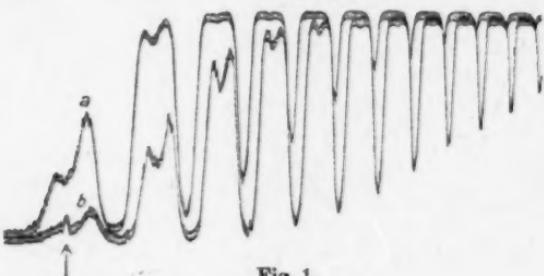


Fig. 1.

solche Kurve der Intensitätsverteilung von Interferenzen der Linie H_{α} dar, und zwar die obere Kurve *a* bei doppelter Intensität als die untere *b*; der Pfeil bezeichnet eine Zacke, hervorgerufen durch einen kleinen Fehler der Originalplatte. Wir möchten nicht versäumen, den Herren Koch und Goos auch an dieser Stelle herzlichst für ihre Bemühungen zu danken.

b) Die Helligkeitsverteilungskurve und damit auch die Halbwelte der Linien wurde ferner auf folgende Weise gewonnen: der Spalt des Kollimators wurde von oben nach unten mit kontinuierlich zunehmender Lichtstärke beleuchtet, indem eine solche Blende auf die Achse des kleinen Elektromotors (vgl. oben bei a)) gesetzt wurde, daß eine kontinuierliche Skala von Beleuchtungsstärken in der Spaltebene erzielt wurde. Diese Blende hatte in den endgültigen Versuchen¹⁾ folgende Gestalt: zwei einander gleiche, aus Blech geschnittene, gleichschenklige

1) Bei Vorversuchen benutzte andere Blendenformen, bestehend aus schräg abgeschnittenen Kreiszylindern u. dgl. wurden wegen der verwickelteren Auswertung der mit ihnen erhaltenen Photographien wieder verlassen und mögen hier übergangen werden.

Dreiecke wurden so gebogen, daß sie mit ihren Grundlinien auf der Peripherie einer Kreisscheibe standen, also mit ihren Flächen in der Mantelfläche eines Kreiszylinders lagen. Fig. 2 stellt eine solche Blende dar; die Spitzen der beiden Dreiecke sind *A* und *B*, ihre Grundlinien stoßen in den Punkten *C* und *D* zusammen. Die Dreiecke sind auf eine kreisförmige Messingscheibe fest aufgelötet, die auf einer Achse *E*¹⁾ sitzt, welche ihrerseits mittels Übertragung durch einen Gummischlauch *G* an die Achse des kleinen Elektromotors (vgl. oben bei a)) gekoppelt war. Das Licht fiel in Richtung der Pfeile, fast senkrecht zur Fläche der Dreiecke *ACBD*, auf die Blende und von da auf den dicht dahinter stehenden Spalt des Kollimators.

Bei Umdrehung um die Achse *E* wurde eine Spaltbeleuchtung erzielt, deren Intensität proportional der Spaltlänge, von der Grundlinie *CD* gerechnet, war: es entspricht den Punkten *C*, *D* und der Kreisscheibe die Beleuchtungsstärke 0, den obersten Punkten *A* und *B* der Blende die volle Beleuchtungsstärke. Dazwischen liegen, proportional dem Abstand von der Nulllinie *CD* verteilt, die übrigen Werte der Beleuchtungsstärke.

Die Interferenzstreifen des Plattenpektroskops werden nun derartig erzeugt, daß ihre Richtung in der Brennebene des Beobachtungsfernrohres parallel zur Achse der rotierenden Blende steht. Es werden so die einzelnen Interferenzstreifen mit variabler Helligkeit erzeugt, und zwar ist die Helligkeit proportional dem Abstand von der Null-Linie. Dementsprechend sind die Interferenzstreifen am längsten da, wo die Beleuchtung am stärksten, also im Hauptmaximum, und es wird die Intensitätsverteilung in einem Interferenzstreifen durch verschiedene Länge des Interferenzstreifens angegeben. So erhaltene Bilder der Interferenzstreifen sind auf Taf. II, Fig. a, b, c, in etwa 4facher Vergrößerung der Originale wiedergegeben; die Umgrenzungskurve der hellen Flächen verbindet diejenigen Punkte,

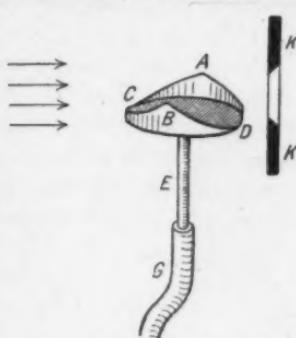


Fig. 2.

1) Die Axe *E* war durch Kugellager (in Fig. 2 fortgelassen) gehalten.

bei denen die Beleuchtungsstärke gerade den Schwellenwert der Empfindlichkeit der photographischen Platte erreicht, und es stellt also jede Umgrenzungskurve die „Intensitätsverteilung“ der einzelnen Spektrallinie dar, wobei der Maßstab der Ordinaten noch näher zu erörtern ist (vgl. folgenden § 2). Die Schärfe der Umgrenzungskurve hängt von der Schärfe der Empfindlichkeitsgrenze der photographischen Platte ab; die Umgrenzungskurve ist um so schärfer, je plötzlicher die Empfindlichkeitsgrenze der photographischen Platte einsetzt.

Die auf Taf. II dargestellten Bilder sind auf Agfa- und Hauffplatten aufgenommen und durch viermaliges Umkopieren mit Graphosplatten (photomechanische Platte) gewonnen, wodurch die Umgrenzungskurven schärfer geworden sind als bei der als Ausgang gewählten Aufnahme; sie sind ohne Retouche hergestellt.

§ 2. Zur Auswertung der wie auf Taf. II erhaltenen Helligkeitsverteilungskurven ist folgendes zu berücksichtigen:

Man entnimmt, je härter die Bilder kopiert sind, um so schärfer eine Umgrenzungskurve, die für die Intensitätsverteilung der Linie charakteristisch ist. Diese Umgrenzungskurve ist eine „Kurve gleicher Schwärzung“. Die Schwärzung jedes Punktes dieser Kurve ist jedoch durch verschiedene Umstände

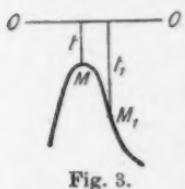


Fig. 3.

bedingt. Betrachten wir beispielsweise die Verhältnisse an der höchsten Stelle einer Umgrenzungskurve (Fig. 3); also im Maximum M . Die Linie OO sei die Null-Linie, d. h. diejenige, welche die Beleuchtungsintensität 0 hat. Das Maximum M hat dann eine gewisse Zeitdauer hindurch Licht empfangen, und es ist diese Zeitdauer durch den Abstand t von OO gegeben, sofern die in § 1, Fig. 2, benutzte rotierende Blende mit der Spaltlänge proportionaler Spaltbeleuchtung angewendet wurde. Die Schwärzung ist¹⁾ durch das Produkt aus Beleuchtungsintensität J und Beleuchtungszeit t , also durch die Größe $J \cdot t$ gegeben. Das gleiche ist der Fall für irgendeinen andern Punkt M_1 der Umgrenzungskurve, die Schwärzung ist also hier

1) Unter Voraussetzung des Bunsen-Roscoeschen Gesetzes, welches nach den Versuchen von Weber, Ann. d. Phys. 45. S. 801. 1915 tatsächlich gilt, wenn, wie bei uns, intermittierende Beleuchtung angewandt wird.

durch eine Größe $J_1 \cdot t_1$ gegeben. Da nun beide Punkte M und M_1 auf derselben Schwärzungskurve liegen, so folgt mithin

$$It = I_1 t_1,$$

also:

$$(1) \quad I_1 = I \cdot \frac{t}{t_1}.$$

Die Gleichung (1) vermittelt die Herstellung der Intensitätsverteilungskurve, wie ohne weiteres ersichtlich ist. Sucht man nur die Größe der „Halbwelte“ (auch halbe „Breite der Linie“ genannt), so hat man allein diejenige Ordinate t_1 zu suchen, welche $= 2t$ ist; der senkrechte Abstand der beiden Ordinaten t und t_1 gibt dann die gesuchte Halbwelte.

Nun sind in Wirklichkeit die Dinge nicht ganz so einfach wie es nach der bisherigen Darstellung zunächst erscheint, sondern es ist die Schwärzung des Punktes M der Umgrenzungskurve wie jedes andern Punktes M_1 noch durch mehrere Umstände bedingt:

a) von einer die Platte gleichmäßig bedeckenden, allgemeinen Schwärzung s , welche kurz als Plattenschleier zu bezeichnen wäre.

b) Im Punkte M hat man nicht allein eine Wellenlänge λ , sondern auch die Intensitäten Σi aller in dem Bereich der Spektrallinie sonst vorhandenen Wellenlängen. Dies röhrt daher, daß die Größen i für jedes λ von der Intensitätsverteilungskurve der Interferenzen abhängen. Die Belichtungszeit der Größen Σi beträgt t im Punkte M .

c) Ferner hat man im Punkte M noch Schwärzung infolge eines kontinuierlichen Spektrums, das jedem Linienspektrum, mehr oder weniger stark, beigegeben ist. Die Schwärzung dieses kontinuierlichen Spektrums ist der Zeit t proportional und kann $= J \cdot t$ gesetzt werden.

Die Gesamtschwärzung im Punkte M beträgt hiernach:

$$I \cdot t + s + \Sigma i \cdot t + J \cdot t.$$

Entsprechend beträgt die Gesamtschwärzung im Punkte M_1 :

$$I_1 \cdot t_1 + s + \Sigma i_1 \cdot t_1 + J \cdot t_1.$$

Beide Ausdrücke sind einander gleich, und es ergibt sich statt der Gleichung (1):

$$(2) \quad I \cdot t + s + \Sigma i \cdot t + J \cdot t = I_1 t_1 + s + \Sigma i_1 t_1 + J \cdot t_1.$$

Hieraus folgt:

$$(3) \quad I_1 = I \cdot \frac{t}{t_1} - \frac{t_1 - t}{t_1} J - (\Sigma i_1 t_1 - \Sigma i t),$$

oder:

$$(4) \quad I_1 = (I + J) \frac{t}{t_1} - J - (\Sigma i_1 t_1 - \Sigma i t).$$

Gegenüber Gleichung (1) enthält (3) oder (4) also Korrektionsgrößen. Da $t_1 > t$ und auch $i_1 > i$, so ist die Größe I_1 *kleiner* als die Größe $I \cdot \frac{t}{t_1}$; man würde bei *Nichtberücksichtigung der Einflüsse b), c)* Werte von I_1 , die *zu groß* sind, und demgemäß auch Werte der „Halbwelte“, die *zu groß* sind.

Zur Erzielung möglichst genauer Messungen ist der Einfluß der unter b) und c) genannten Umstände durch passende Wahl der Versuchsbedingungen herabzudrücken. Der unter a) genannte Einfluß fällt von selbst fort (vgl. oben), die unter b) und c) gegebenen Einflüsse jedoch nicht. Nun kann man das kontinuierliche Spektrum (vgl. oben b) und c)) durch Verwendung eines möglichst engen Kollimatorspalts und durch tunlichste Vergrößerung der im Strahlengang befindlichen Vordispersion herabdrücken; die Intensitätsverteilungskurve der Interferenzen hat ihren günstigsten Verlauf dicht an der Grenze des

streifenden Austritts der reflektierten Strahlen. Diese Bedingungen waren in der im folgenden § 3 beschriebenen Versuchsanordnung einigermaßen erfüllt.

§ 3. Die optische Anordnung zur photographischen Aufnahme der Wasserstofflinie war folgende:

Die Lichtquelle L (vgl. § 1) ent sandte ihr Licht auf den Kollimator spalt K , vor dem die rotierende Blende B (vgl. § 1, Fig. 2) angebracht war. Das Licht ging dann durch das

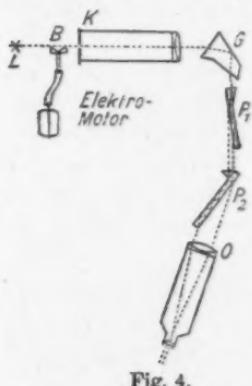


Fig. 4.

Glasprisma G und durch die planparallele Glasplatte P_1 . Dies ist die gewöhnliche Anordnung des Interferenzspektroskops. Nun fiel aber das von P_1 herkommende Licht nicht sofort auf das Objektiv O der photographischen Kamera (bzw. des Beobachtungs-

fernrohrs), sondern es durchsetzte noch eine zweite planparallele Glasplatte P_2 . Während die Platte P_1 so gestellt war, daß das Licht nahezu streifend (Austrittswinkel $> 89^\circ$) die Platte verließ, war die Platte P_2 so in den Strahlengang eingefügt, daß das Licht bei *kleineren* Austrittswinkel, bei etwa 85° , die Platte P_2 durchsetzte. Hierdurch wird folgendes erreicht:

1. werden die Interferenzstreifen der Platte P_1 von parallelen, sehr feinen, nahezu äquidistanten Interferenzstreifen der Platte P_2 durchzogen, so daß die einzelnen Teile der Interferenzstreifen von P_1 durch dunkle, feine Zwischenräume voneinander getrennt werden. Hierdurch werden beim Entwickeln der photographischen Platte die Störungen verminderd, welche stark belichtete, einander benachbarte Teile der Platte aufeinander ausüben;

2. es werden die Interferenzstreifen der Platte P_1 durch die Prismenwirkung der Platte P_2 vergrößert (etwa auf das 3—4fache). Die Platte P_2 wirkt also hier wie eine Zylinderlinse, indem sie in *einer* Richtung vergrößert, in der dazu senkrechten Richtung *keine* Änderung der Vergrößerung bewirkt;

3. es wird der Abstand der Interferenzen der Platte P_1 gleichmäßiger;

4. es wird die Intensität der Hauptmaxima der Platte P_1 gleichmäßiger.

Der Spalt des Kollimators muß recht eng gemacht werden, damit das kontinuierliche Spektrum möglichst unterdrückt wird. Es konnten, je nach der Lichtstärke der einzelnen Linien, in Bruchteilen einer Stunde bzw. in mehrstündiger Expositionsduauer Bilder von einzelnen Linien der Balmerserie gewonnen werden. Einige derartige Aufnahmen sind in Taf. II in etwa 4facher Vergrößerung wiedergegeben.

§ 4. Die Ausmessung der Platten ergab nach den in § 2 a) und b) angegebenem Verfahren Werte für die Halbwerte, Intensitätsverteilung und Komponentenabstände der einzelnen Linien, zu denen folgendes zu sagen ist.

Die auf Taf. II wiedergegebenen Aufnahmen, deren Nulllinie mit der oberen Kante der Bilder a , b und c zusammenfällt, wurden ausgemessen, indem pro Millimeter auf der Kopie das zugehörige Ordinatenverhältnis t/t_1 entnommen

wurde¹⁾), wo t und t_1 die auf S. 568, Fig. 3, dargestellte Bedeutung haben. Zu diesen experimentellen Werten, die durch die Kreuze in Fig. 5—7 dargestellt sind, wurden dann in An-

$$\begin{array}{c} H_a \\ + + + \text{ Experimentell} \\ \text{Theoretisch } J_1 = 2 - \frac{(\delta \lambda)^2}{16} \end{array}$$

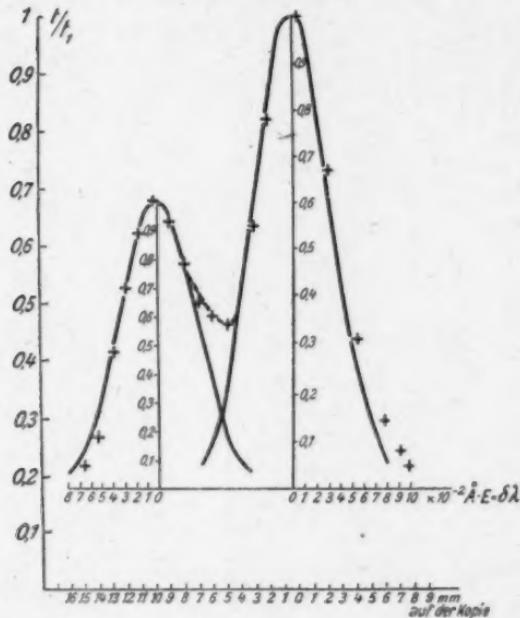


Fig. 5.

lehnung an Gleichung (4) Kurven für die Intensität I_1 als Funktion von t/t_1 gezeichnet. Zur theoretischen Auswertung ist, wie aus (4) folgt, eine Konstante von jeder Ordinate in Abzug zu bringen; das Glied $\sum i_1 t_1 - \sum i_1 t$ wurde, da nur klein²⁾, außer Betracht gelassen. So erhielt man die in Figg. 5

1) Und zwar unter Berücksichtigung der Intensitätsänderung der Interferenzmaxima verschiedener Ordnungen. Vgl. hierzu P. P. Koch, Ann. d. Phys. 34, S. 377. 1911.

2) Es beträgt nämlich weniger als etwa 1 Proz., wie aus dem Verlauf der Intensitätsverteilungskurve zu schließen ist. Vgl. z. B. O. Lummer und E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 10, S. 471. 1903.

bis 7 gezeichneten Intensitätsverteilungskurven, die sich, wie ersichtlich, durch die Gauss'sche Fehlerkurve e^{-x^2} darstellen lassen; die stärkere (rechte) Welle ist die kürzere. Diese theore-

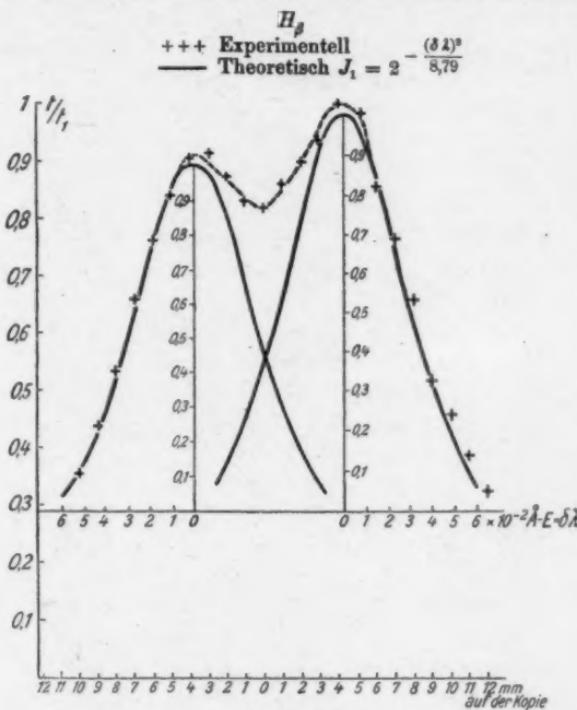


Fig. 6.

tischen Kurven bestätigen die von Rayleigh gegebene Ableitung der Intensitätsverteilung einer einzelnen Spektrallinie, welche für die Geschwindigkeitsverteilung der leuchtenden Träger die Maxwell'sche voraussetzt. Die für die drei Linien H_α , H_β und H_γ gefundenen Verteilungen entsprechen derselben Temperatur von etwa 320° abs. = 50° C. Man entnimmt aus diesen Kurven die Zahlenwerte von $\Delta\lambda$, $\Delta\nu$, $\delta\lambda_{\text{beob.}}$:

λ	H_α	H_β	H_γ
$\Delta\lambda$	0,117	0,067	0,051
$\Delta\nu \cdot 10^{-9}$	8,15	8,50	8,12
$\delta\lambda_{\text{beob.}}$	0,040	0,031	0,027
$\delta\lambda_1 \text{ ber.}$	0,042	0,031	0,027
$\delta\lambda_2 \text{ ber.}$	0,030	0,022	0,019

Hierin bedeutet:

- $\Delta\lambda$ den Abstand beider Komponenten einer Balmerlinie in Å.-E.,

$$\begin{array}{c} H_\gamma \\ + + + \text{ Experimentell} \\ \text{Theoretisch } J_1 = 2 - \frac{(\delta\lambda)^2}{7,0} \end{array}$$

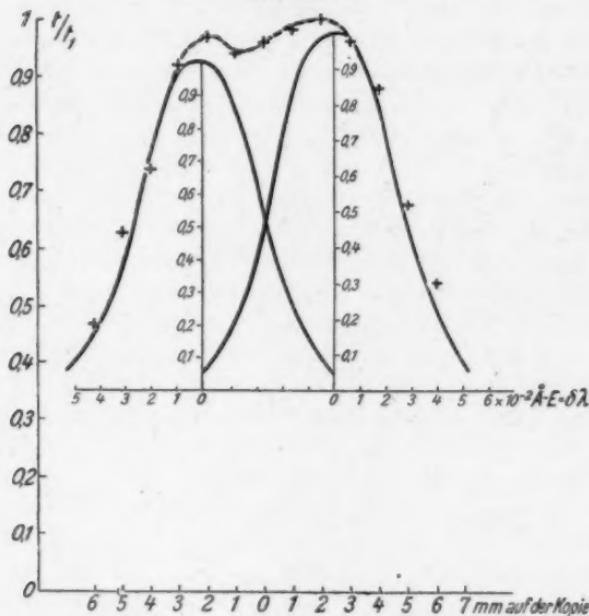


Fig. 7.

$\Delta\nu$ die Differenz der Schwingungszahlen (pro Sekunde) beider Komponenten,

$\delta\lambda$ die halbe Breite einer einzelnen Komponente („Halbwert“) in Å.-E.

Die Indizes 1 bzw. 2 der berechneten Werte von $\delta\lambda$ beziehen sich auf Träger des Molekurgewichts 1 bzw. 2.

Wie man sieht, sind die Messungen im Einklang mit der auch theoretisch wahrscheinlichsten Annahme, daß die Träger der Balmerlinien H_γ -Atome und nicht H_2 -Moleküle sind. — Die Größe $\Delta\nu$ ist innerhalb der Meßgenauigkeit konstant; dies steht im Einklang mit den verschiedenen Modellen des Wasserstoffatoms.

Bemerkenswert ist, daß der Betrag für $\Delta\nu$ etwa um 25 Proz. kleiner gemessen wird, als er aus der theoretischen Feinstrukturkonstanten sich nach Sommerfeld berechnet. Bezuglich der Gründe für diesen Befund möchten wir uns auf die Bemerkung beschränken, daß uns in Anbetracht der Größe der gefundenen Abweichung ein Irrtum bei der Messung nicht ersichtlich ist; übrigens fanden auch frühere Beobachter Werte für $\Delta\nu$, die sich den von uns gefundenen gut annähern.¹⁾

§ 5. Als wir versuchten, das Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten der Balmerlinie zu messen, beobachteten wir folgende, bisher unseres Wissens nicht bemerkte Eigentümlichkeiten: Das Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten, z. B. von H_a , hängt von der Erzeugungsart und von der Lichtquelle ab. Dies soll kurz durch die Figg. *d* und *e* der Tafel erläutert werden, welche die Interferenzstreifen von H_a bei verschiedenen Versuchsbedingungen wiedergeben.

Fig. *d* auf Taf. II bezieht sich auf zwei kommunizierende Wasserstoffröhren gleichen Drucks; die Entladung war geschichtet. Bei d_1 wurde das Licht aus einer 3 cm weiten, 1,8 m langen Entladungsrohre entnommen und zeigt die beiden Komponenten von H_a etwa gleich stark. — Bei d_2 wurde das Licht aus einer ca. 1 mm weiten, kleinen Kapillarröhre entnommen, und zeigt die langwelligere Komponente von H_a stärker als die kurzwelligere.

Fig. *e* auf Taf. II bezieht sich auf ein und dieselbe Entladungsrohre von 3 cm Weite (wie oben), aber auf verschiedene Drucke. Bei Fig. *e*₁ war der Gasdruck so klein wie möglich, so daß die Entladung noch eben durchging; der Kathoden-dunkelraum betrug etwa 3 cm, die Entladung war ungeschichtet. Hier ist die kurzwellige Komponente von H_a die stärkere, im Gegensatz zu Fig. *d*₂ auf Taf. II. — Bei Fig. *e*₂ war der Druck größer, die Entladung geschichtet, und es ist, wie ersichtlich, die Helligkeit beider Komponenten von H_a ziemlich gleich.

Ein ähnliches Verhalten schwankender Intensität beider Komponenten fanden wir auch bei H_β , jedoch ist hier das

1) Vgl. F. Paschen, Ann. d. Phys. 50. S. 933. 1916; E. Gehrecke u. E. Lau, Physik. Zeitschr. 21. S. 634—635. 1920; T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. London (A) 97. S. 307—320. 1920.

Schwanken der Intensitäten geringer. Zuweilen war beim Überwiegen einer Komponente von H_{α} auch bei H_{β} das Überwiegen der entsprechenden Komponente zu beobachten. Waren die beiden Komponenten von H_{α} gleich stark, so war dasselbe bei H_{β} der Fall. War das Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten von $H_{\alpha} = 1,5$, so war es bei $H_{\beta} = 1,1$. Das Intensitätsverhältnis der Komponenten von H_{γ} variierte kaum merklich. Bei Schwankungen des Intensitätsverhältnisses von H_{α} zu H_{β} ist es besonders die langwellige Komponente von H_{α} , welche starke Intensitätschwankungen aufweist. — Weder bei H_{β} noch bei H_{α} bewirkte die Veränderung des Intensitätsverhältnisses beider Komponenten ein Schwanken der Größe $\Delta\nu$.

Wenn man den Druck in 5 cm weiten Röhren sehr niedrig macht (bis zu grüner Glasfluoreszenz), so tritt bei H_{α} die kurzwellige Komponente stark hervor, aber es findet gleichzeitig auch ein *Unschärferwerden* der Linie statt. Die beobachteten Intensitätsveränderungen der Komponenten der Balmerserie sind möglicherweise mit den Anregungsbedingungen des Leuchttens, insonderheit mit der Geschwindigkeit der anregenden Elektronen, in Verbindung zu bringen.

Nachtrag bei der Korrektur: Durch das liebenswürdige Entgegenkommen von Hrn. Dr. Moll (Universität Utrecht) hatten wir die Möglichkeit, eine unserer Aufnahmen von H_{α} durch das Utrechter Registriermikrophotometer ausphotometriert zu erhalten. Wir danken Hrn. Dr. Moll herzlich für seine Hilfe. Die Ausmessung der Mollschen Aufnahme ergab völlige Übereinstimmung mit derjenigen der Herren Koch und Goos (vgl. oben S. 566), sowie mit den von uns aufgenommenen Photographien.

(Eingegangen 15. Juni 1921.)

